ÜBER
CURVEN VIERTER ORDNUNG VOM GESCHLECHTE ZWEI,
IHRE
SYSTEME BERÜHRENDER KEGELSCHNITTE UND DOPPELTANGENTEN.

VON

DR. KARL BOBEK,

PRIVATDOCENT AN DER K. K. DEUTSCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN PRAG.

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 3. FEBRUAR 1887.

Einleitung.

Die ebenen Curven vierter Ordnung vom Geschlechte drei wurden bezüglich der Systeme vierfach berührender Kegelschnitte und Doppeltangenten mehrfach untersucht. Hingegen wurde den Curven 4ter Ordnung vom Geschlechte Zwei weniger Interesse zugewendet.

Herr Brill[1] hat zuerst mit Hilfe des Jacobi'schen Umkehrproblems die Systeme vierfach berührender Kegelschnitte und Doppelangenten für die Curven 4ter Ordnung mit einem Doppelpunkte angegeben.

Später hat Herr Ameseder[2] in einer Reihe geometrischer Untersuchungen über die berührenden Kegelschnitte der Curven vierter Ordnung auch die Curve vierter Ordnung mit Doppelpunkt und Spitze betrachtet.

Die nachfolgenden Untersuchungen beziehen sich auf Curven 4ter Ordnung vom Geschlechte Zwei.

In der ersten Abtheilung wurde die Curve 4ter Ordnung mit einem Doppelpunkte betrachtet. Im I. Abschnitte wurden Erzeugungen dieser Curve angegeben, auf Grund deren man zu zwei kanonischen Gleichungsformen der Curve gelangt. Diese Formen erlauben nun, in einfacher Weise die Gleichungen der Systeme vierfach berührender Kegelschnitte aufzustellen und es wurden in II aus diesen Gleichungen mehrere für die Classification der Systeme von Doppeltangenten sehr wichtige Sätze aufgestellt und bewiesen. Auf Grund dieser Sätze gelingt es, die 16 Doppeltangenten in die 30 Systeme der vierfach berührenden Kegelschnitte einzuordnen, und ich habe in III zwei diese Anordnung darstellende Tabellen angeben.

---

[1] Brill, „Über diejenigen Curven, deren Coordinaten sich als hyperelliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen", Crelle, Bd. LXV, p. 283 — und „Note über Doppeltangenten einer Curve 4ter Ordnung mit einem Doppelpunkte", Mathematische Annalen, Bd. VI, S. 66.

[2] Ameseder, „Geometrische Untersuchung der ebenen Curven 4ter Ordnung", Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien, Bd. LXXXVII, S. 15.

Im IV. Abschnitte wurden die zur Curve adjungirten dreifach berührenden Kegelschnitte betrachtet und die 16 Systeme dadurch charakterisirt, dass jedesmal die sechs Doppeltangenten angegeben wurden, welche in einem solchen System auftreten. Die daselbst gegebene Tabelle stellt diese Anordnung vor.

In der zweiten Abtheilung wurden besondere Curven vom Geschlechte Zwei betrachtet. Und zwar solche Curven, welche in dem Doppelpunkte einen oder zwei Wendepunkte besitzen, und schliesslich wurde die Curve 4ter Ordnung mit einer Spitze betrachtet. Es wurden bei derselben die Systeme vierfach berührender Kegelschnitte, sowie auch die Systeme der adjungirten dreifach berührenden Kegelschnitte angeben und die Einordnung der Doppeltangenten dieser Curve in die Systeme der Kegelschnitte bewirkt. Zwei daselbst aufgestellte Tabellen veranschaulichen diese Einordnung.

Erste Abtheilung.

In der ersten Abtheilung setzen wir eine Curve 4ter Ordnung mit einem Doppelpunkt voraus, dessen Tangenten die Curve noch ausserhalb in einem Punkte treffen, so dass kein Wendepunkt im Doppelpunkte liegt. Die im I. Abschnitt angestellten Betrachtungen fordern zwar nicht überall diese Voraussetzungen, und es ist leicht, die Beschränkung anzugeben, welche mit dem Fallenlassen derselben eintreten. Um aber nicht zu weitläufig werden zu müssen, wurde an den Voraussetzungen festgehalten und etwaige Bemerkungen wurden in der zweiten Abtheilung gemacht, insoweit sie für die dort betrachteten Curven erforderlich erschienen.

I. Erzeugung der Curve 4ter Ordnung mit einem Doppelpunkte.

1. Bezieht man einen Strahlenbüschel ein-eindeutig auf die Kegelschnitte eines Systems vom Index 2, so ist der Ort der Schnittpunkte entsprechender Curven eine Curve 4ter Ordnung, welche im Scheitel des Strahlenbüschels einen Doppelpunkt besitzt.

Sind A, B lineare, Θ, H quadratische Functionen der Coordinaten, so möge

$$A-\lambda B = 0 \tag{1}$$

die Gleichung des Strahlenbüschels und

$$\Theta_a + 2H\lambda + \Theta_b\lambda^2 = 0 \tag{2}$$

die Gleichung des Kegelschnittsystems vom Index 2 sein, und es mögen einander die Curven (1) und (2) entsprechen, welche dasselbe λ besitzen. Die Gleichung des Erzeugnisses von (1) und (2) ist dann

$$\Phi \equiv \Theta_a B^2 + 2HAB + \Theta_b A^2 = 0 \tag{3}$$

und zeigt, dass die Curve $\Phi = o$, die wir auch einfach Φ nennen wollen, in den Schnittpunkten der Geraden A und B einen Doppelpunkt besitzt. Die Kegelschnitte (2) hüllen eine Curve 4ter Ordnung $\mathfrak{K}_4$ ein, deren Gleichung

$$\mathfrak{K}_4 \equiv H^2 - \Theta_a\Theta_b = 0 \tag{4}$$

ist.

2. Es ist aber auch umgekehrt möglich, jede vorgelegte Curve 4ter Ordnung Φ mit einem Doppelpunkte d auf die angegebene Art zu erzeugen.

Es mögen die Punktepaare, welche die Geraden A, B, C, X... durch d auf Φ ausschneiden mit $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $x\xi$... bezeichnet werden. Sie bilden die Gruppen der einzigen linearen Schaar von Gruppen zu zwei Punkten g_2^{1}, die auf der hyperelliptischen Curve Φ auftreten kann. Ferner mögen durch φ Curven 3ter Ordnung bezeichnet werden, die durch den Doppelpunkt von Φ gehen, also zu Φ adjungirt sind.

Es sei K ein Kegelschnitt, der durch das Paar $m\mu$ von Φ geht und diese noch in sechs Punkten, die wir (K) nennen wollen, trifft. Dann geht durch (K) und irgend ein Paar $a\alpha$ von Φ noch ein Büschel von Curven

3ter Ordnung φ, denn A zusammen mit K stellt eine φ dar, welche die Gruppe $m\mu$ von Φ enthält, mithin geht durch den Restschnitt von $A.K$ mit Φ noch genau ein Büschel von Curven φ, welcher die $g_2^{(1)}$ ausschneidet, zu welcher Schaar die Gruppe $m\mu$ gehört.

Wir bezeichnen durch φ_{ax} die Curve des Büschels durch (K), d, $a\alpha$, welche das Paar $x\xi$ auf Φ ausschneidet.

Durch $a\alpha$ legen wir einen willkürlichen Kegelschnitt Θ_a. Dieser wird von der Curve φ_{ax} ausser in $a\alpha$ in einem variablem Quadrupel (x) geschnitten, so zwar, dass die vier Punkte (x) und $x\xi$ auf einem Kegelschnitte liegen, den wir mit Θ_x bezeichnen wollen. Es bestimmt nämlich φ_{ax} mit $X.\Theta_a$ einen Büschel von Curven 3ter Ordnung, dessen Basispunkte $a\alpha$, $x\xi$, d, (x) sind, und da $a\alpha d$ auf einer Geraden liegen, so liegen die sechs übrigen $x\xi$, (x) auf einem Kegelschnitte.

Beschreibt $x\xi$ die Curve Φ, also φ_{ax} den Büschel, so wird der Kegelschnitt Θ_x ein System durchlaufen, welches auf den Büschel φ_{ax} und also auch auf den Strahlenbüschel, den X beschreibt ein — eindeutig bezogen ist, und von dem wir zeigen werden, dass es den Index 2 besitzt. Vor Allem ist klar, dass auch K diesem System angehört und als Θ_m zu bezeichnen wäre. Aber auch Θ_a gehört zu diesem System. Das System bleibt nämlich ungeändert, wenn man zu seiner Erzeuzung an Stelle des Kegelschnittes Θ_a und des Büschels φ_a durch d, $a\alpha$, (K), den Kegelschnitt Θ_x und den Büschel φ_x durch d, $x\xi$, (K) nimmt.

Denn, sei Θ_y einer der Kegelschnitte des Systems, welcher durch $y\eta$ und das Quadrupel (y) auf Θ_a bestimmt ist, in welchem φ_{ay} den Θ_a trifft, so kann gezeigt werden, dass φ_{xy} durch die vier Schnittpunkte von Θ_x und Θ_y geht. Findet diess statt, so kann Θ_y auch mit Hilfe von Θ_x und der Curve φ_{xy} erhalten werden.

Nun sind $\Theta_x.\varphi_{ay}$ und $\Theta_y.\varphi_{ax}$ zwei Curven 5ter Ordnung, deren 10 Schnittpunkte $a\alpha$, (y), (x) auf dem Kegelschnitte Θ_a liegen, mithin geht durch die 15 übrigen eine Curve 3ter Ordnung. Diese Punkte sind aber (K), d, $x\xi$, $y\eta$ und die vier Schnittpunkte von Θ_x und Θ_y, also geht die Curve φ_{xy}, welche durch (K), d, $x\xi$, $y\eta$ bestimmt ist, auch durch die Schnittpunkte von Θ_x und Θ_y.

Da nun φ_{xa} den Θ_x in dem Quadrupel (x) trifft, welches auf Θ_a liegt, denn durch dieses wurde Θ_x erhalten, so ersieht man, dass Θ_a auch zum System der Kegelschnitte gehört.

Es kann aber auch an Stelle von K irgend ein Kegelschnitt Θ_n des Systems gewählt werden, welcher das Paar $n\nu$ enthält. Legt man nämlich durch die Schnittpunkte der Curven 3ter Ordnung $A.\Theta_x$ und $X.\Theta_a$ den Büschel von Curven 3ter Ordnung, von dem die frühere φ_{ax} eine Curve ist, so trifft jede die Φ noch in sechs variablen Punkten, die stets auf einem Kegelschnitte des Systems liegen. Denn sei φ'_{ax} die Curve, welche in der Gruppe (K') von sechs Punkten trifft, dann geht durch (K') und $d, a\alpha$ ein Büschel von Curven φ, welche die $g_2^{(1)}$ aus Φ ausschneiden, da φ'_{ax} die Gruppe $x\xi$ der $g_2^{(1)}$ enthält.

Da nun die drei Punkte $d, a\alpha$ auf A liegen, so liegen die sechs Punkte (K') auf einem Kegelschnitte, der noch ein Paar $n\nu$ der $g_2^{(1)}$ von Φ enthält, denn A in Verbindung mit dem Kegelschnitte bildet auch eine φ, welche eine Gruppe der $g^{(1)}_2$ ausschneiden muss.

Wenn nun gezeigt wird, dass der Büschel von Curven φ'_a durch (K'), d, $a\alpha$ mit Θ_a dasselbe System Θ_x erzeugt, wie es früher construirt wurde, so ist der Kegelschnitt durch (K') offenbar ein Kegelschnitt des Systems.

Betrachten wir den Büschel von Curven φ_a durch d, $a\alpha$, (K) und der Curven φ'_a durch d, $a\alpha$, (K'), so schneiden beide die Paare der $g_2^{(1)}$ aus Φ aus, und die Büschel werden zu einander projectivisch, wenn man diejenigen Curven einander zuweist, welche dasselbe Paar $x\xi$ von Φ enthalten. Diese projectivischen Büschel φ_a und φ'_a erzeugen daher ausser Φ noch einen Kegelschnitt, der durch $a\alpha$ geht. Da nun φ_{ax} und φ'_{ax} auch entsprechende Curven sind, die sich ausserhalb Φ noch im Quadrupel (x) schneiden, so geht der Kegelschnitt durch $a\alpha$ und (x) und ist also mit Θ_a identisch. Hieraus folgt aber, dass entsprechende Curven φ_{ay} und φ'_{ay} der beiden Büschel in denselben vier Punkten (y) von Θ_a einander schneiden müssen, und dass daher die Kegelschnitte Θ_y, welche (y) mit $y\eta$ verbinden, auch durch den Büschel φ'_a erhalten werden.

Hieraus folgt, dass man die Kegelschnitte Θ_n auch erhält, wenn man durch die sechs Punkte, in denen die Curven φ des Büschels $A\Theta_x + \lambda X\Theta = 0$ die Φ_a noch schneiden, stets den Kegelschnitt legt. Derselbe schneidet dann Φ noch in dem Paar $n\nu$. Durch den Punkt n geht also der Kegelschnitt Θ_n des Systems, welcher auch den Punkt ν enthält und mittels des Quadrupels (n) auf Θ_a bestimmt wird, in welchem φ_{an} den Θ_a schneidet. Es geht aber durch n noch ein zweiter Kegelschnitt $\Theta_{n'}$ des Systems, der ein anderes Paar $n'\nu'$ enthält, und der auf die eben angegebene Art erhalten wird, indem die Curve des Büschels $A\Theta_x + \lambda X\Theta_a = 0$, welche durch n geht, die Φ in einer Gruppe (K) von sechs Punkten schneidet, zu der n gehört, und welche den Kegelschnitt $\Theta_{n'}$ bestimmt.

Durch einen Punkt von Φ gehen also wenigstens zwei Kegelschnitte des Systems, nämlich Θ_n und $\Theta_{n'}$, von denen der erstere auch ν enthält, der letztere aber ein Paar $n'\nu'$ aus Φ ausschneidet, das von $n\nu$ verschieden ist.

Wir wollen nun zeigen, dass das System der Θ auch in der That blos den Index 2 besitzt.

Die Kegelschnitte Θ hüllen eine Enveloppe ein, und zwar wird ein Kegelschnitt Θ_a von dem benachbarten Θ'_a in einem Quadrupel $[a]$ getroffen, in welchem Θ_a die Enveloppe berührt. Wir haben aber gezeigt, dass die Curve φ_{ax} welche das Paar $x\xi$ aus Φ ausschneidet, Θ_a in dem Quadrupel (x) trifft, welches mit $x\xi$ den Θ_x bestimmt. Die Curve φ_{aa} des Büschels, welche also Φ in $a\alpha$ berührt, trifft mithin Θ_a in dem erwähnten Quadrupel $[a]$. Man erhält daher die Quadrupel $[x]$ auf der Enveloppe des Systems der Θ_x, wenn man Θ_x mit der Curve φ_{xx} schneidet, die durch die Gruppe (K) und d geht und Φ in $x\xi$ berührt. Offenbar erhält man dieselben Quadrupel, wenn man an Stelle von φ_{xx} die Curven φ'_{xx} benützt, welche durch (K') und d gehen und Φ in $x\xi$ berühren. Da sich nun die Curven φ'_{xx} und φ_{xx} ausser in d und $x\xi$ nur noch in dem Quadrupel $[x]$ treffen, so kann man diese Quadrupel auf der Enveloppe und mithin die Enveloppe selbst dadurch erhalten, dass man $x\xi$ die Curve Φ durchlaufen lässt und den Ort der vier noch fehlenden Schnittpunkte der Curven φ_{xx} und φ'_{xx} bestimmt.

Zu diesem Behufe wollen wir zeigen, dass die Curven φ_{xx}, welche durch die 7 Punkt (K) und d gehen und Φ in $x\xi$ berühren, ein System vom Index 2 bilden. Das lineare Netz der Curven φ, welche durch d und (K) gehen, schneidet Φ in Gruppen von vier Punkten, die stets Paare $x\xi$, $y\eta$ von $g_2^{(1)}$ sind. Denn wir sahen, dass durch $a\alpha$ ein Büschel dieser Curven geht, welcher die $g_2^{(1)}$ aus Φ ausschneidet, also geht durch $x\xi$ eine bestimmte dieses Büschels. Dann geht aber durch $x\xi$, (K) und d wieder ein Büschel von Curven φ, welcher die $g_2^{(1)}$ ausschneidet, da eine φ das Paar $a\alpha$ enthält, also geht eine bestimmte durch $y\eta$. Durch (K) d, x, y ist aber stets eine und nur eine φ bestimmt. Denn würde ein Büschel durch diese Punkte hindurch gehen, so würde derselbe auf Φ eine $g_2^{(1)}$ ausschneiden, die von der durch die Strahlen von d bestimmten verschieden wäre, was unmöglich ist. Legt man also durch x, y die Curve des linearen Netzes, so geht sie auch durch ξ und η.

Sei nun t ein willkürlicher Punkt der Ebene, so geht durch denselben ein Büschel von Curven φ. Dieselben schneiden Φ in den Paaren $a\alpha$, $b\beta$ auf den Strahlen A, B von d, und diese Strahlenpaare bilden eine quadratische Involution. Denn seien φ_{ab}, $\varphi_{a'b'}$ zwei Curven des Büschels durch t, welche die Paare auf den Strahlen AB, $A'B'$ aus Φ ausschneiden, so bestimme man durch die zwei Strahlenpaare AB, $A'B'$ eine quadratische Strahleninvolution und beziehe ihre Paare projectivisch auf die Curven φ des Büschels durch t; so dass den Paaren AB, $A'B'$ die Curven φ_{ab}, $\varphi_{a'b'}$, entsprechen. Als drittes Paar entsprechender Curven ordne man dem Strahl dt die in diese Gerade und den Kegelschnitt K, durch (K') zerfallende Curve 3ter Ordnung zu. Die Strahleninvolution und der zu ihr projectivische Büschel von Curven 3ter Ordnung erzeugen zusammen eine Curve 5ter Ordnung, die den Strahl dt als Theil enthält. Der Rest, eine Curve 4ter Ordnung, hat in d noch einen Doppelpunkt, geht durch (K) sowie $a\alpha$, $b\beta$, $a'\alpha'$, $b'\beta'$ auf Φ und muss daher mit Φ identisch sein. Die Involution, welche durch die zwei Paare AB, $A'B'$ bestimmt ist, hat nun zwei Doppelstrahlen und diese schneiden Φ je in einem Paare, in welchem je eine Curve des Büschels die Φ berührt.

Durch t gehen mithin zwei Curven φ, welche Φ in je einem Paar der $g_2^{(1)}$ berühren.

Die Curven $\varphi_{x x}$ sowie $\varphi'_{x x}$, welche durch (K), resp. (K') und d gehen und Φ in $x\xi$ berühren, bilden daher ein System vom Index 2, und sind durch die Paare $x\xi$ von Φ beide Systeme auf einander ein-eindeutig bezogen. Ihr Erzeugniss ist mithin von der $2.3+2.3=12^{ten}$ Ordnung. Zu diesem Erzeugnisse zählt Φ doppelt, also ist der Rest eine Curve 4ter Ordnung $\mathfrak{K}_4$. Da wir nun sahen, dass der Ort der Schnittpunkte der Curven φ^{xx} und φ'^{xx}, die nicht auf Φ liegen, die Enveloppe des Systems der Kegelschnitte Θ ist, so ersehen wir, dass die Enveloppe des Systems der Θ eine Curve 4ter Ordnung $\mathfrak{K}_4$ ist, und dass mithin der Index des Systems der Kegelschnitte 2 sein muss. Hiemit ist die im Eingange aufgestellte Behauptung erwiesen.

Um dieses System der Θ und damit auch $\mathfrak{K}_4$ zu bestimmen, hatten wir die Wahl zweier Kegelschnitte Θ_a, Θ_m freigestellt, nur mussten diese durch je ein Paar $a\alpha$, resp. $m\mu$ von Φ gehen. Die Kegelschnitte können hiebei auch als zerfallende angenommen werden, nur nicht so, dass eine von den Geraden das Paar $a\alpha$, resp. $m\mu$ trägt, da wir voraussetzten, dass Θ_a, Θ_m nicht durch d gehen sollen.

3. Die Enveloppe $\mathfrak{K}_4$ des Systems der Kegelschnitte Θ berührt Φ in allen Punkten, in denen sie dieser Curve begegnet.

Denn sei s ein Punkt von $\mathfrak{K}_4$, der auf Φ liegt, so wird die Curve φ_{ss}, welche Φ in s berührt, den Kegelschnitt Θ_s ausser in $s\sigma$ noch in dem Quadrupel $[s]$ treffen, das auf $\mathfrak{K}_4$ liegt. Da aber ein Punkt von $\mathfrak{K}_4$ also von $[s]$, in den Punkt s fällt, so muss φ_{ss} den Kegelschnitt Θ_s in s berühren, also auch $\mathfrak{K}_4$, da Θ_s und $\mathfrak{K}_4$ einander in $[s]$ berühren.

Die Kegelschintte in Θ_a bilden ein System vierfach berührender Kegelschnitte von $\mathfrak{K}_4$.

Die acht Berührungspunkte von $\mathfrak{K}_4$ auf Φ bilden die Basispunkte eines Curvenbüschels 3ter Ordnung, dessen 9ter Punkt d ist, und dessen Curven daher aus Φ die Paare $a\alpha$ ausscheiden, während sie $\mathfrak{K}_4$ in den Gruppen $[a]$ treffen, welche mit $a\alpha$ auf dem Kegelschnitte Θ_a liegen, der $\mathfrak{K}_4$ in $[a]$ berührt.

Denn aus den Gleichungen (3) und (4) folgt

$$A^2\mathfrak{K}_4+\Theta_a\Phi \equiv [\Theta_a B+AH]^2, \tag{5}$$

d. h. die Curve dritter Ordnung

$$\Theta_a B+AH=0 \tag{6}$$

geht durch die acht Berührungspunkte von $\mathfrak{K}_4$ und Φ. Sie geht aber auch durch d und das Paar $a\alpha$ auf $A=0$ und $\Theta_a=0$. Hieraus folgt aber, dass durch die acht Berührungspunkte von $\mathfrak{K}_4$ auf Φ ein Büschel von Curven dritter Ordnung geht, die d enthalten und aus Φ die g_2^{1} ausschneiden, da die Curve (6) eine Gruppe der Schaar enthält. Denkt man also A variabel und den Büschel durch d beschreibend, so wird die Curve 3ter Ordnung (6) auch den Curvenbüschel beschreiben und Θ_a aus (5) das System der Kegelschnitte, welches aus Φ die Paare auf A und aus $\mathfrak{K}_4$ die Quadrupel $[a]$ ausschneidet. Die Identität (5) zeigt auch, dass $\mathfrak{K}_4$ in den Schnittpunkten mit Θ_a von diesem berührt wird, und dass dieses Quadrupel aus $\mathfrak{K}_4$ durch die zugehörige Curve 3ter Ordnung (6) ausgeschnitten wird.

4. Denkt man sich durch die acht Punkte, in denen $\mathfrak{K}_4$ und Φ einander berühren, den Büschel von Curven 4ter Ordnung gelegt, dessen Curven sich alle in den acht Punkten berühren, so wird jede Curve C_4 dieses Büschels von den Curven 3ter Ordnung durch die acht Punkte in einer Schaar von Quadrupeln geschnitten, in denen je ein Kegelschnitt die C_4 berührt. Unter diesen Curven C_4 tritt dann auch unsere Curve Φ mit dem Doppelpunkt in d, der Basispunkt des Curvenbüschels 3ter Ordnung ist, auf. Diese Curve Φ wird von dem Büschel 3ter Ordnung ausser in d nur in Paaren $a\alpha$ geschnitten und das System der vierfach berührenden Kegelschnitte übergeht für diese in die doppeltgezählten Graden durch d, welche die Paare $a\alpha$ tragen.

Hat man irgend zwei Curven 4ter Ordnung C_4, C_4', die sich in acht Punkten berühren, so zwar, dass durch die acht Punkte kein Kegelschnitt geht, so wird jede Curve des Büschels 4ter Ordnung $C_4+\lambda C_4'=0$ von den Curven 3ter Ordnung durch die acht Punkte in Quadrupeln geschnitten, in welchen vierfach berührende Kegelschnitte an die Curve 4ter Ordnung möglich sind. Durch den 9ten Basispunkt d' des Curvenbüschels

3ter Ordnung geht eine Curve 4ter Ordnung $\Phi' \equiv C_4 + \lambda' C_4' = 0$, welche in d' einen Doppelpunkt besitzt. Denn der Curvenbüschel 3ter Ordnung schneidet eine Curve 4ter Ordnung des Büschels z. B. C_4, wie eben erwähnt, in Quadrupeln und sei der Kegelschnitt, welcher C_4 in einem solchen Quadrupel berührt, Θ'. Dann bilden die Θ' ein System von Kegelschnitten vom Index 2, das ein — eindeutig auf den Curvenbüschel 3ter Ordnung bezogen ist, durch die Quadrupel auf C_4. Beide Curvensysteme erzeugen daher ausser C_4 noch eine Curve 4ter Ordnung, die in d', welcher Punkt nicht auf C_4 liegt, einen Doppelpunkt besitzen muss. Diese muss mit Φ' identisch sein, da sie C_4 in den acht Basispunkten des Curvenbüschels 3ter Ordnung berührt, wie man aus der Erzeugung leicht ersieht.

5. Hat man nun umgekehrt irgend eine Curve 4ter Ordnung C_4, welche Φ in acht Punkten berührt, durch die ein Büschel von Curven 3ter Ordnung geht, dessen Curven nicht alle zerfallen (indem die acht Punkte nicht auf einem Kegelschnitte liegen sollen), so schneidet der Büschel von Curven 3ter Ordnung, die Curve Φ in Quadrupeln, in denen vierfach berührende Kegelschnitte möglich sind. Gehört d nicht zu den Basispunkten des Büschels, so werden die Curven des Büschels 3ter Ordnung in vier variablen Punkten die Φ schneiden, in denen stets ein berührender Kegelschnitt an Φ möglich ist.

Liegt aber d auf allen Curven φ des Büschels 3ter Ordnung, dann schneiden die Curven φ auf Φ die $g_2^{(1)}$ aus, und wir wollen zeigen, dass die vier Punkte $[a]$, in denen φ_a noch die Curve C_4 trifft, welche Φ in den acht Punkten berührt, mit dem Paar $a\alpha$, welches sie auf Φ ausschneidet, auf einem Kegelschnitte Θ_a liegen, der C_4 in dem Quadrupel $[a]$ berührt.

Dieser Satz folgt zwar direct aus dem sub 4. bewiesenen Satze, soll aber hier noch auf einem anderen Wege bewiesen werden.

In dem Büschel von Curven 6ter Ordnung

$$[\varphi_a]^2 + \lambda A^2 C_4 = 0$$

ist nämlich die Curve Φ enthalten, also muss für $\lambda = \lambda'$ die Identität

$$[\varphi_a]^2 + \lambda' A^2 C_4 \equiv \Phi . \Theta$$

bestehen, wo $\Theta = 0$ ein Kegelschnitt ist, der C_4 in den vier Schnittpunkten von φ_a berührt und durch die Punkte $a\alpha$ geht, in denen A die φ_a trifft, die auch auf Φ liegen.

Es möge bemerkt werden, dass nicht vorausgesetzt wurde, dass C_4 irreducibel sei, sondern dass alle Betrachtungen auch für beliebig reducible Curven C_4 gelten, die Φ in acht Punkten berühren, sobald nur diese Punkte nicht auf einem Kegelschnitte liegen, also C_4 keinen doppelt gezählten Bestandtheil enthält.

6. Aus dem Voranstehendem folgt noch: Hat man acht Punkte auf Φ so bestimmt, dass als 9ter Basispunkt für den Büschel von Curven 3ter Ordnung der Doppelpunkt d hinzutritt, so sind die acht Punkte Berührungspunkte eines Büschels von Curven 4ter Ordnung und irgend eine C_4 desselben kann dazu dienen, ein System Θ von Kegelschnitten zu bestimmen, welches C_4 vierfach berührt und aus Φ die $g_2^{(1)}$ ausschneidet.

Denn sei φ_a die Curve des Büschels 3ter Ordnung, welche durch das Paar $a\alpha$ geht, dann schneidet $[\varphi_a]^2 = 0$ die $\Phi = 0$ in dem vollständigem Schnittpunktesystem einer Curve 6ter Ordnung. Da nun $[A]^2 = 0$ durch die Punkte a, α, d geht, so liegen die 16 in den acht Punkten vereinigten Schnittpunkte auf einer Curve 4ter Ordnung C_4, oder durch die acht Punkte geht eine die Φ daselbst berührende Curve 4ter Ordnung. Diese kann wie in 5. gezeigt wurde, zur Construction des Systems der Θ benützt werden.

Von den acht Punkten des obigen Satzes kann man sechs willkürlich, nur nicht auf einem Kegelschnitte, auf Φ annehmen. Denn legt man durch d, $a\alpha$ und sechs willkürliche Punkte von Φ die Curve φ der 3ten Ordnung, so schneidet sie Φ noch in zwei Punkten, die mit den sechs angenommenen zusammen die Basis eines Curvenbüschels 3ter Ordnung bilden, welcher aus Φ die $g_2^{(1)}$ ausschneidet.

7. Nimmt man zur Erzeugung einer Curve 4ter Ordnung Φ als System von Kegelschnitten speciell eine Kegelschnittsschaar, mit den vier festen Tangenten D_1, D_2, D_3, D_4, indem man die Kegelschnitte dieser Schaar

projectivisch auf die Strahlen eines Büschels bezieht, so sind die Geraden D_i Doppeltangenten von Φ. Durch die acht Berührungspunkte derselben geht nach Früherem ein Büschel von Curven 3ter Ordnung φ, welche alle den Doppelpunkt d von Φ enthalten. Die Curve φ_a, welche Φ in dem Paare $a\alpha$ schneidet, trifft D_i in den Punkten a_i, so dass die sechs Punkte $a, \alpha, a_1, a_2, a_3, a_4$ auf einem Kegelschnitte der Schaar liegen, der also in a_i die Gerade D_i berührt.

Ist d_{ik} der Schnittpunkt der Geraden $D_i D_k$, so treten unter den Kegelschnitten des Systems auch die drei doppeltgezählten Geraden $\overline{d_{12} \cdot d_{34}}$, $\overline{d_{13} \cdot d_{24}}$, $\overline{d_{14} \cdot d_{23}}$ auf. Sie mögen die ihnen entsprechenden Strahlen T_1, T_2, T_3 des Büschels vom Scheitel d in t_1, t_2, t_3 treffen, dann müssen T_1, T_2, T_3 Tangenten von Φ in t_1, t_2, t_3 sein.

Die Curve 3ter Ordnung φ_1 des erwähnten Büschels, welche durch t_1 geht, berührt Φ daselbst und muss durch die Punkte d_{12}, d_{34} gehen, da sie in den vier Berührungspunkten des zerfallenden Kegelschnittes der Schaar die Tangenten D_i treffen muss.

Bezeichnen wir die Geraden $\overline{d_{12} \cdot d_{34}}$, $\overline{d_{13} \cdot d_{24}}$, $\overline{d_{14} \cdot d_{23}}$ der Reihe nach mit τ_1, τ_2, τ_3 und legen wir das Dreieck, welches diese bilden, als Coordinaten-Dreieck zu Grunde, so können wir die Gleichungen der vier Tangenten in der Form:

$$\begin{aligned} D_1 &= \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0 \\ D_2 &= \tau_1 - \tau_2 - \tau_3 = 0 \\ D_3 &= \tau_1 - \tau_2 + \tau_3 = 0 \\ D_4 &= \tau_1 + \tau_2 - \tau_3 = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

annehmen. Die Gleichung der Schaar wird dann

$$\tau_1^2 + (\tau_1^2 + \tau_2^2 - \tau_3^2)\lambda + \tau_2^2 \lambda^2 = 0, \tag{8}$$

indem die Enveloppe der Kegelschnitte dieses Systems die Gleichung

$$(\tau_1^2 + \tau_2^2 - \tau_3^2)^2 - 4\tau_1^2 \tau_2^2 = D_1 D_2 D_3 D_4 = 0 \tag{9}$$

hat, dieselbe also aus den vier Geraden (7) besteht.

Setzt man nun

$$\begin{aligned} T_1 &= a_1 \tau_1 + a_2 \tau_2 + a_3 \tau_3 \\ T_2 &= b_1 \tau_1 + b_2 \tau_2 + b_3 \tau_3 \end{aligned} \tag{10}$$

und bezieht den Strahlenbüschel

$$T_1 - \lambda T_2 = 0 \tag{11}$$

durch λ eindeutig auf die Schaar (8), so erzeugen dieselben die Curve 4ter Ordnung, deren Gleichung

$$\Phi = \tau_1^2 T_2^2 + (\tau_1^2 + \tau_2^2 - \tau_3^2)\, T_1 T_2 + \tau_2^2 T_1^2 = 0 \tag{12}$$

ist, die in dem Scheitel des Büschels (11) einen Doppelpunkt hat, und deren zwei Tangenten aus demselben die Geraden $T_1 = 0$, $T_2 = 0$ sind. Eine dritte Tangente ist die Gerade $-T_3 \equiv T_1 + T_2 = 0$ und ihr Berührungspunkt ist der Schnittpunkt mit $\tau_3 = 0$, d. h. der Punkt t_3 von Φ.

Die noch fehlenden drei Tangenten von dem Doppelpunkte an Φ ergeben sich aus der Bedingung, dass der Kegelschnitt (8) die Gerade (11) berühren soll.

Die Bedingung ist in λ vom 6ten Grade i. A., wird aber, da hier $\lambda = \infty$ eine Wurzel werden muss, indem derselben die doppelt gezählte Gerade $\tau_2 = 0$ entspricht, welche jede Gerade der Ebene berührt, blos vom 5ten Grade. In der That ergibt sich die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1+\lambda & 0 & 0 & a_1 - \lambda b_1 \\ 0 & \lambda(1+\lambda) & 0 & a_2 - \lambda b_2 \\ 0 & 0 & -\lambda & a_3 - \lambda b_3 \\ a_1 - \lambda b_1 & a_2 - b\lambda_2 & a_1 - \lambda b_3 & 0 \end{vmatrix} = \lambda(1+\lambda)\left[(a_3 - \lambda b_3)^2 (1+\lambda) - (a_2 - \lambda b_2)^2 - (a_1 - \lambda b_1)^2 \lambda\right] = 0, \tag{13}$$

welche in λ vom 5ten Grade ist und die zwei Wurzeln $\lambda = 0$, $\lambda = -1$ besitzt, für welche der Kegelschnitt (8) in die doppelt gezählten Geraden $\tau_1 = 0$, resp. $\tau_3 = 0$ zerfällt; die drei übrigen Wurzeln hängen von den a_i und b_i ab.

Beachtet man, dass $T_3 + T_1 + T_2 = 0$ ist, so ersieht man, dass die Gleichung der Curve Φ noch in folgenden zwei Formen geschrieben werden kann:

$$\Phi_{13} \equiv \tau_1^2 T_3^2 + (\tau_1^2 + \tau_3^2 - \tau_2^2)\, T_1 T_3 + \tau_3^2 T_1^2 = 0 \tag{12a}$$

$$\Phi_{23} \equiv \tau_2^2 T_3^2 + (\tau_2^2 + \tau_3^2 - \tau_1^2)\, T_2 T_3 + \tau_3^2 T_2^2 = 0. \tag{12b}$$

Wie in 3. allgemein gezeigt wurde, ergibt sich die Curve 3ter Ordnung, welche durch die acht Berührungspunkte der vier Doppeltangenten, sowie durch d und t_1 resp. t_2 geht aus den sich hier direct einfach ergebenden Identitäten:

$$\left.\begin{aligned} {}^1/_4 T_1^2 . D_1 D_2 D_3 D_4 + \tau_1^2 \Phi &\equiv [{}^1/_2 T_1 (\tau_1^2 + \tau_2^2 - \tau_3^2) + \tau_1^2 T_2]^2. \\ {}^1/_4 T_2^2 . D_1 D_2 D_3 D_4 + \tau_2^2 \Phi &\equiv [{}^1/_2 T_2 (\tau_1^2 + \tau_2^2 - \tau_3^2) + \tau_2^2 T_1]^2. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Setzt man

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= {}^1/_2 T_1 (\tau_1^2 + \tau_2^2 - \tau_3^2) + \tau_1^2 T_2 \\ \varphi_2 &= {}^1/_2 T_2 (\tau_1^2 + \tau_2^2 - \tau_3^2) + \tau_2^2 T_1 , \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

so ersieht man, dass der Strahlenbüschel (11) auch mit dem Curvenbüschel 3ter Ordnung

$$\varphi_1 + \lambda \varphi_2 \equiv {}^1/_2 (\tau_1^2 + \tau_2^2 - \tau_3^2)(T_1 + \lambda T_2) + 2(\tau_1^2 T_2 + \lambda \tau_2^2 T_1) = 0 \tag{16}$$

welcher durch λ auf den ersteren projectivisch bezogen ist, die Curve Φ erzeugen.

Die Berührungspunkte der Curve Φ auf den Doppeltangenten können durch Kegelschnitte ausgeschnitten werden, die durch den Doppelpunkt und zwei der Punkte t_1, t_2, t_3 gehen. Die Gleichungen dieser Kegelschnitte ergeben sich einfach aus (12), und zwar liegen die Berührungspunkte

von $D_1 = 0$ auf den Kegelschnitten $K_{12} \equiv \tau_1 T_2 - \tau_2 T_1 = 0$, $K'_{13} \equiv \tau_3 T_1 - \tau_1 T_3 = 0$, $K_{23} \equiv \tau_2 T_3 - \tau_3 T_2 = 0$
„ $D_2 = 0$ „ „ „ $K'_{12} \equiv \tau_1 T_2 + \tau_2 T_1 = 0$, $K_{13} \equiv \tau_3 T_1 + \tau_1 T_3 = 0$, $K_{23} \equiv \tau_2 T_3 - \tau_3 T_2 = 0$
„ $D_3 = 0$ „ „ „ $K'_{12} \equiv \tau_1 T_2 + \tau_2 T_1 = 0$, $K'_{13} \equiv \tau_3 T_1 - \tau_1 T_3 = 0$, $K'_{23} \equiv \tau_2 T_3 + \tau_3 T_2 = 0$ (17)
„ $D_4 = 0$ „ „ „ $K_{12} \equiv \tau_1 T_2 - \tau_2 T_1 = 0$, $K_{13} \equiv \tau_3 T_1 + \tau_1 T_3 = 0$, $K'_{23} \equiv \tau_2 T_3 + \tau_3 T_2 = 0$,

wie man leicht erkennt. Denn z. B. für $D_1 = 0$ also $-\tau_3 = \tau_1 + \tau_2$ wird $\Phi \equiv (\tau_1 T_2 - \tau_2 T_1)^2$ aus (12) sich ergeben.

Man ersieht hieraus, dass die vier Berührungspunkte je zweier Doppeltangenten auf einem der Kegelschnitte liegen, der durch d und zwei der Punkte t_1, t_2, t_3 geht.

8. Wir haben in 2., S. 6 gezeigt, dass, wenn man durch zwei Paare $a\alpha$, $b\beta$ von Φ eine adjungirte Curve φ der 3ten Ordnung legt, dieselbe Φ noch in sechs Punkten trifft, durch welche ein Netz adjungirter Curven φ geht, von dessen Elementen jedes Φ in zwei Paaren trifft, und in welchem jeder Büschel solche Gruppen aus Φ ausschneidet, die aus dem Doppelpunkt d durch eine quadratische Involution projicirt werden.

Legen wir nun durch die Paare $a\alpha$, $b\beta$ auf den Strahlen A, B einen Kegelschnitt Θ, der Φ noch in vier Punkten trifft, so wird der Büschel von Kegelschnitten durch diese vier Punkte aus Φ Punktgruppen ausschneiden, die aus d durch eine quadratische Involution projicirt werden, welche auf die Kegelschnitte des Büschels projectivisch bezogen ist, durch die Punkte von Φ. Denn Θ wird durch irgend eine durch d gehende Gerade T zu einer φ ergänzt und der Büschel von Curven φ, der durch einen beliebigen Punkt von T bestimmt wird, besteht aus dem Kegelschnittsbüschel, der eben erwähnt wurde und aus T.

Wir denken uns die Involution im Doppelpunkt d bestimmt, durch die Paare A, B und das Strahlenpaar $A + B\sqrt{-1} = 0$ und $A - B\sqrt{-1} = 0$, so dass wir als Gleichung der Involution

$$(A^2 + B^2)\mu + 2AB = 0 \tag{18}$$

ansetzen können. Ferner wollen wir voraussetzen, dass der Kegelschnitt $H=0$ durch die Paare geht, welche $A^2+B^2=0$ aus Φ ausschneidet, dann wird der auf die Involution (18) projectivisch bezogene Kegelschnittsbüschel die Gleichung

$$\mu H - \Theta = 0 \tag{19}$$

haben, und durch Elimination von μ ergibt sich

$$\Phi \equiv (A^2+B^2)\Theta + 2HAB = 0 \tag{20}$$

als Gleichung der Curve 4ter Ordnung. Das System der Kegelschnitte, welches mit dem Strahlenbüschel $A-\lambda B=0$ diese Curve Φ erzeugt, hat die Gleichung

$$\Theta(1+\lambda^2)+2H\lambda = 0$$

und die Curve 4ter Ordnung $\mathfrak{K}_4$, welche das System einhüllt, besteht aus zwei Kegelschnitten des Büschels (19), da

$$\mathfrak{K}_4 \equiv H^2-\Theta^2 \equiv (H-\Theta)(H+\Theta)$$

wird.

Wir nehmen statt des willkürlichen Kegelschnittes Θ die doppelt gezählte Gerade T_{12}, welche die Punkte t_1, t_2 mit einander verbindet., deren Tangenten T_1, T_2 durch d gehen. Die Gerade T_{12} schneidet ausser in den zwei zusammenfallenden Paaren t_1, t_2 die Φ noch in den Punkten a_1, a_2 und der Büschel (19) wird die Φ in diesen Punkten berühren. Seine Gleichung wird

$$\mu H - T_{12}^2 = 0 \tag{21}$$

sein. Die Involution (18) übergeht in

$$(T_1^2+T_2^2)\mu + 2T_1T_2 = 0 \tag{22}$$

und die Gleichung der Curve 4ter Ordnung wird

$$\Phi \equiv (T_1^2+T_2^2)T_{12}^2 + 2HT_1T_2 = 0. \tag{23}$$

Dieselbe wird auch erzeugt durch den Strahlenbüschel

$$T_1 - \lambda T_2 = 0$$

und das System der Kegelschnitte

$$T_{12}^2(1+\lambda^2)+2H\lambda = 0, \tag{24}$$

welches als Enveloppe die beiden Kegelschnitte

$$H - T_{12}^2 = 0 \qquad H + T_{12}^2 = 0$$

besitzt, die Φ ausser in a_1, a_2 noch in den Schnittpunkten von Φ mit $T_1+T_2=0$, resp. $T_1-T_2=0$ berühren. Wir wollen diese Geraden mit $\mathfrak{T}_{12}$ und $\mathfrak{T}'_{12}$ bezeichnen und die Punkte auf denselben mit $t\tau$, resp. $t'\tau'$.

9. Die Curve 4ter Ordnung mit einem Doppelpunkte besitzt 13 Constanten, indem das Auftreten eines Doppelpunktes eine Bedingung involvirt. Diese Constanten treten in die Coëfficienten der Gleichung der Curve ein. Denkt man sich die Curvengleichung auf ein anderes Coordinatensystem transformirt, so kann man durch die acht eingeführten Transformationsconstanten acht Constanten der Curve willkürliche Werthe (innerhalb gewisser Grenzen) geben und es bleiben dann nur fünf Constanten übrig, deren Zahl durch lineare Transformation nicht verringert werden kann, und von denen die Curve wesentlich abhängt.

Die Gleichungen (12) und (23) sind kanonische Formen für die Curve 4ter Ordnung, indem sie blos von fünf wesentlichen Constanten abhängen.

Denn legt man als Coordinaten-Dreieck in (12) das zu Grunde, dessen Seiten $\tau_1=0$, $\tau_2=0$, $\tau_3=0$ sind, so enthält (12) nur fünf wesentliche Constanten, nämlich die Verhältnisse der sechs Grössen a_i, b_i aus (10).

Eine vorgelegte Gleichung einer Curve 4ter Ordnung kann auf 80 wesentlich verschiedene Arten auf eine solche kanonische Form gebracht werden, wobei die drei Formen 12, 12a, 12b als nicht wesentlich verschie-

dene anzusehen sind, wie wir später bei der Untersuchung über die Systeme der Doppeltangenten zeigen werden (vergl. III, sub 25., S. 140).

Für die Gleichung (23) nehmen wir das aus $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_{12} = 0$ gebildete Dreieck als Coordinaten-Dreieck. Dasselbe besteht daher aus zwei Tangenten aus dem Doppelpunkte von Φ und der Berührungssehne derselben.

Es treten in (23) nur die sechs Coëfficienten in H auf, welches eine quadratische Function von T_1, T_2, T_{12} wird. Man kann dann in Φ statt T_{12} auch $c.T_{12}$ einführen und c so wählen, dass ein Coëfficient in H einen beliebigen Werth erhält, so dass in (23) also eigentlich nur fünf wesentliche Constanten auftreten.

Da es sechs Tangenten von d an Φ gibt, sobald in d kein Zweig einen Wendepunkt besitzt, was wir vorraussetzen wollen, so kann die Gleichung von Φ auf $^1/_2.6.5 = 15$ wesentlich verschiedene Arten auf die Form (23) gebracht werden. Oder es gibt 15 kanonische Gleichungs-Formen von der Art (23).

II. Die vierfach berührenden Kegelschnitte der Curve 4ter Ordnung mit einem Doppelpunkte.

10. Wir haben in 4., S. 7 gesehen, dass durch acht Berührungspunkte einer Curve C_4 mit Φ ein Büschel von Curven 3ter Ordnung geht, welcher auf Φ Quadrupel ausschneidet, in denen ein die Φ berührender Kegelschnitt möglich ist. Fallen von diesen Quadrupeln stets zwei Punkte in den Doppelpunkt, d. h. hat der Büschel der Curven 3ter Ordnung den Doppelpunkt d zum neunten Punkt, dann ist der Strahlenbüschel durch d das System der vierfach berührenden Kegelschnitte, indem jeder Strahl desselben doppelt gezählt einen solchen Kegelschnitt vorstellt.

Wir wollen nun voraussetzen, dass der Büschel von Curven 3ter Ordnung durch die acht Berührungspunkte von C_4 auf Φ nicht d zum 9ten Punkt besitzt, dass also die Curven C_3 des Büschels die Φ in vier variablen Punkten treffen. Dann ist offenbar jedes Quadrupel von Punkten $[\mathfrak{K}]$ so beschaffen, dass ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ in demselben die Φ berührt, und je zwei Quadrupel $[\mathfrak{K}]$ und $[\mathfrak{K}']$ liegen auf einem Kegelschnitte K.

Denn wird $[\mathfrak{K}]$ von C_3, $[\mathfrak{K}']$ von C_3' ausgeschnitten, so geht durch 16 Schnittpunkte der Curve 6ter Ordnung $C_3.C_3'$ mit Φ die Curve 4ter Ordnung C_4, also liegen die acht letzten nämlich $[\mathfrak{K}]$ und $[\mathfrak{K}']$ auf einem Kegelschnitte.

Es sei nun φ die Curve 3ter Ordnung des obigen Büschels, die durch den Doppelpunkt d von Φ geht. Sie schneidet Φ noch in zwei Punkten, die nicht auf einer Geraden mit d liegen können. Denn würde dieses eintreten, so ginge durch die acht Schnittpunkte von φ mit Φ und d ein Büschel von Curven 3ter Ordnung, während wir gerade voraussetzten, dass der 9ter Punkt zu den acht angenommenen nicht d sei.

Sind die Schnittpunkte von φ mit Φ, daher t_1 und t_2, so bestimmen $\overline{dt_1}$ und $\overline{dt_2}$ zwei Strahlen T_1, T_2 von d, die Φ in t_1 und t_2 berühren müssen. Jede Gruppe $[\mathfrak{K}]$, die von der Curve C_3 des Büschels auf Φ ausgeschnitten wird, liegt mit d, t_1, t_2 auf einem Kegelschnitte K, welcher φ in d berührt.

Denn C_4 geht durch die Schnittpunkte von $C_3.\varphi$ mit Φ, also besteht die Identität, wenn K und M gewisse quadratische Functionen der Coordinaten sind

$$K.C_4 \equiv \varphi.C_3 - M.\Phi, \tag{1}$$

wobei also $M = 0$ derjenige Kegelschnitt ist, welcher die acht Punkte enthält, in denen C_4 von φ und C_3 geschnitten wird. Es ist ferner $K = 0$ der Kegelschnitt, welcher durch das Quadrupel $[\mathfrak{K}]$ geht, in dem C_3 die Φ schneidet und überdies durch die Punkte t_1, t_2, in welchen φ die Φ trifft. Es enthält K auch den Doppelpunkt d von Φ, und da C_4 und C_3 nicht durch ihn hindurchgehen, muss K die Curve φ in d berühren, denn $K.C_4 = 0$ schneidet in d die Curve $\varphi = 0$ genau so wie $M.\Phi = 0$ d. h da i. A. M nicht durch d geht, so wie $\Phi = 0$. Da nun $\Phi = 0$ die $\varphi = 0$ in d in zwei Punkten trifft, so muss dies auch $K = 0$ thun, denn C_4 geht nicht durch d.

C_3 war nun eine willkürliche Curve des Büschels. Lässt man dieselbe mit φ zusammenfallen, so ergibt sich die Identität.

$$K'.C_4 \equiv \varphi^2 - M'\Phi$$

und aus dieser folgt, dass K' in d einen Doppelpunkt haben muss, indem jede Curve des Büschels 6ter Ordnung $\varphi^2-\lambda M'\Phi=0$ in d einen Doppelpunkt besitzt. Es muss also $K'\equiv T_1 T_2$ sein d. h. in das Product zweier linearer Factoren zerfallen. Dann folgt aber aus

$$T_1 \,.\, T_2 \,.\, C_4 \equiv \varphi^2 - M'\Phi, \tag{2}$$

dass sowohl $T_1=0$ als $T_2=0$ die Curve $\Phi=0$ in ihren Schnittpunkten mit $\varphi=0$ berühren, d. h. T_1 und T_2 sind Tangenten von Φ in t_1 und t_2.

11. Multiplieirt man die Identität (1) mit λ und subtrahirt sie von (2) so erhält man die Identität

$$[T_1 \,.\, T_2 - \lambda K]\, C_4 \equiv [\varphi - \lambda C_3]\,\varphi - [M' - \lambda M]\,\Phi\,, \tag{3}$$

aus derselben folgt, dass der Kegelschnittsbüschel

$$T_1 T_2 - \lambda K = 0 \tag{4}$$

aus $\Phi=0$ dieselben Quadrupel [$\mathfrak{K}$] ausschneidet, wie der Curvenbüschel 3ter Ordnung

$$\varphi - \lambda C_3 = 0, \tag{5}$$

d. h. der Büschel von Kegelschnitten durch d, t_1, t_2, welcher in d eine feste Tangente $\mathfrak{T}_{12}$ besitzt, die auch die Curve φ berührt, schneidet aus Φ ein System von Quadrupeln [$\mathfrak{K}$] aus. Wir wollen in der Folge durch [$\mathfrak{K}$] stets ein solches Quadrupel von Punkten bezeichnen, in welchem ein die Φ berührender Kegelschnitt möglich ist.

Unter den Kegelschnitten (4) befindet sich auch einer, der in die feste Tangente $\mathfrak{T}_{12}$ und die Gerade T_{12} zerfällt, welche die Punkte t_1, t_2 trägt. Die T_{12} schneidet Φ noch in den Punkten a_1, a_2, die $\mathfrak{T}_{12}$ in dem Paare $t\tau$, so dass a_1, a_2, t, τ ein Quadrupel [$\mathfrak{K}$] bilden, das mit dem in 8. gefundenen identisch sein muss.

Nun haben wir in 8. gesehen, dass durch die Punkte a_1, a_2 auf T_{12} zwei Kegelschnitte gehen, welche Φ in a_1, a_2 und in dem Paare t, τ, resp. t', τ' berühren. Es bilden also a_1, a_2, t, τ und a_1, a_2, t', τ' je ein Quadrupel [$\mathfrak{K}$], resp. [$\mathfrak{K}'$] und es lässt sich zeigen, dass alle Kegelschnitte des Büschels durch t_1, t_2, d, welche entweder $\mathfrak{T}_{12}$ oder $\mathfrak{T}'_{12}$ berühren Φ in Quadrupeln eines Systems schneiden, und dass von den Kegelschnitten, die durch d, t_1, t_2 gehen, es nur diese beiden Büschel thun.

Denn sei K ein Kegelschnitt durch d, t_1, t_2, welcher Φ in einem Quadrupel [$\mathfrak{K}$] schneidet, in welchem der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ die Φ berührt, so ist in dem Büschel von Curven 4ter Ordnung

$$\rho\Phi - K^2 = 0$$

die aus $\mathfrak{K}$ und $T_1 T_2$ bestehende Curve enthalten, also muss für ein bestimmtes ρ eine Identität

$$\rho\Phi - K^2 \equiv T_1 \,.\, T_2 \,.\, \mathfrak{K} \tag{6}$$

stattfinden.

Die Form von Φ nehmen wir aus der Gleichung (23) in I, S. 11.

$$\Phi \equiv (T_1^2 + T_2^2)\, T_{12}^2 + 2H\, T_1 T_2 = 0, \tag{A}$$

und da K durch die Punkte d, t_1, t_2 geht, so kann

$$K \equiv a\, T_1 T_2 + b\, T_1 T_{12} + c\, T_2 T_{12}$$

gesetzt werden, wobei a, b, c irgend welche Constanten sind. Dann folgt

$$\rho\Phi - K^2 \equiv (\rho - b^2)\, T_1^2 T_{12}^2 + (\rho - c^2)\, T_2^2 T_{12} + T_1 T_2 \,[2\rho H - a^2 T_1 T_2 - 2ab\, T_1 T_{12} - 2ac\, T_2 T_{12} - 2bc\, T_{12}^2]. \tag{7}$$

Soll also für einen speciellen Werth von ρ die Identität (6) stattfinden, so muss

$$\rho = b^2 = c^2$$

werden können, d. h. es ist entweder $b=c$ oder $b=-c$; dann wird aber

$$K \equiv a\, T_1 T_2 + b\, (T_1 \pm T_2)\, T_{12}\,, \tag{8}$$

d. h. die Kegelschnitte K müssen entweder die Gerade $T_1+T_2=0$ oder $T_1-T_2=0$ im Punkte d berühren. Diese beiden Geraden aber sind $\mathfrak{T}_{12}$, resp. $\mathfrak{T}'_{12}$ welche die Paare $t\tau$, resp. $t'\tau'$ tragen, die mit $a_1 a_2$ je ein Quadrupel bilden.

12. Wir wollen nun auch die Gleichung des Systems vierfach berührender Kegelschnitte der Curve Φ aufstellen, welche den beiden die Quadrupel von Punkten ausschneidenden Büscheln durch t_1, t_2, d, die in d die Gerade $\mathfrak{T}_{12}$, resp. $\mathfrak{T}'_{12}$ berühren, entsprechen.

Da die Geraden $\mathfrak{T}_{12}$ und $\mathfrak{T}'_{12}$ die Gleichungen $T_1+T_2=0$, resp. $T_1-T_2=0$ haben, so ist die Gleichung der beiden Büschel

$$2\mu T_1 T_2+(T_1\pm T_2)T_{12}=0. \tag{9}$$

Nun folgt, dass für ein beliebiges μ

$$\Phi\equiv[2\mu T_1 T_2+(T_1\pm T_2)T_{12}]^2+2T_1 T_2[H\mp T_{12}^2-2\mu(T_1\pm T_2)T_{12}-2\mu^2 T_1 T_2] \tag{10}$$

ist, wie die Reduction rechter Hand ohne weiters ergibt. Hieraus ersieht man, dass der Kegelschnitt

$$K\equiv 2\mu T_1 T_2+(T_1+T_2)T_{12}=0 \tag{11}$$

die Curve Φ in dem Quadrupel $[\mathfrak{K}]$ (ausser in t_1, t_2, d) schneidet, in welchem die Curve Φ von dem Kegelschnitte

$$\mathfrak{K}\equiv H-T_{12}^2-2\mu(T_1+T_2)T_{12}-2\mu^2 T_1 T_2=0 \tag{12}$$

berührt wird. Hingegen schneidet der Kegelschnitt

$$K'\equiv 2\mu T_1 T_2+(T_1-T_2)T_{12}=0 \tag{11 a}$$

die Curve Φ in dem Quadrupel $[\mathfrak{K}]$, in welchem der Kegelschnitt

$$\mathfrak{K}'\equiv H+T_{12}^2-2\mu(T_1-T_2)T_{12}-2\mu^2 T_1 T_2=0 \tag{12 a}$$

die Φ berührt.

Für ein variables μ stellt die Gleichung (12) ein System von vierfach berührenden Kegelschnitten der Curve dar. Diese Kegelschnitte gehören alle dem durch die drei Kegelschnitte

$$H-T_{12}^2=0,\quad (T_1+T_2)T_{12}=0,\quad T_1 T_2=0$$

bestimmten linearen Netz an. Hieraus oder aus den einfachen Identitäten für zwei Kegelschnitte

$$\mathfrak{K}\equiv H-T_{12}^2-2\mu(T_1+T_2)T_{12}-2\mu^2 T_1 T_2$$
$$\mathfrak{K}_1\equiv H-T_{12}^2-2\mu_1(T_1+T_2)T_{12}-2\mu_1^2 T_1 T_2$$

ersieht man, da

$$\mathfrak{K}-\mathfrak{K}_1\equiv 2(\mu_1-\mu)[(T_1+T_2)T_{12}+(\mu_1+\mu)T_1 T_2]$$

ist, dass der Kegelschnitt, welcher durch d und die vier Schnittpunkte zweier Kegelschnitte desselben Systems geht, auch durch die Punkte t_1, t_2 geht und in d dieselbe Tangente $\mathfrak{T}_{12}$ besitzt, welche dem System zugehört.

Aus der Identität

$$(\mu-\mu_1)^2\Phi\equiv[H-T_{12}^2-(\mu+\mu_1)(T_1+T_2)T_{12}-2\mu\mu_1 T_1 T_2]^2-\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1,$$

deren Richtigkeit eine einfache Reduction ergibt, folgt, dass je zwei Quadrupel desselben Systems, in welchem die Kegelschnitte $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$ vierfach berühren auf einem Kegelschnitte

$$C\equiv H-T_{12}^2-(\mu+\mu_1)(T_1+T_2)T_{12}-2\mu\mu_1 T_1 T_2=0$$

liegen.[1]

---

[1] Aus der Gleichung (12) ersieht man auch, dass die Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ des Systems die Gerade $T_1=0$ in derselben quadratischen Involution schneiden, wie der Kegelschnittsbüschel $H-T_{12}^2-2\mu T_2 T_{12}=0$, dass also in dieser Involution der Doppelpunkt d von Φ und t_1 ein Paar entsprechender Punkte sind. Dies folgt übrigens auch daraus, dass die Kegelschnitte

13. Wir wollen die Systeme vierfach berührender Kegelschnitte, welche denselben Tangenten $T_1 T_2$ aus d zugeordnet sind und deren Gleichungen (12) und (12a) angeschrieben wurden, einander conjungirte Systeme nennen.

Beide enthalten als speciellen Kegelschnitt des Systems das Tangentenpaar $T_1 T_2$, welches für $\mu = \infty$ sich ergibt.

Wir haben gesehen, dass die Gleichung der Curve 4ter Ordnung mit Doppelpunkt auf 15 verschiedene Arten auf die Form (A) gebracht werden kann, entsprechend den 15 Combinationen zu Zweien, der durch d gehenden sechs Tangenten von Φ. Hieraus folgt nun, dass wir entsprechend diesen 15 kanonischen Gleichungsformen 30 Systeme vierfach berührender Kegelschnitte für Φ erhalten, von denen je zwei einander conjungirt sind.

In jedem System und dem conjungirten tritt als specieller Kegelschnitt ein Tangentenpaar aus dem Doppelpunkte an Φ auf.

Wir wollen die 30 Systeme von vierfach berührenden Kegelschnitten oder auch die Systeme der Quadrupel von Punkten, in denen die Kegelschnitte berühren, mit $[ik]$ und $[ik]'$ bezeichnen, wobei i, k die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 bedeuten sollen und das System $[ik]$ dem System $[ik]'$ conjungirt ist. Beide enthalten als speciellen Kegelschnitt das Tangentenpaar T_i, T_k.

Die Kegelschnitte K_{ik}, welche die Quadrupel des Systemes $[ik]$ mit d verbinden, gehen dann noch durch t_i, t_k und haben in d die Tangente $\mathfrak{T}_{ik}$; während die Kegelschnitte K'_{ik}, welche durch t_i, t_k gehen und in d die Tangente $\mathfrak{T}'_{ik}$ besitzen, das System der Quadrupel $[ik]'$ ausschneiden, welches dem ersteren conjungirt ist.

14. Ausser den eben gefundenen 30 Systemen von vierfach berührenden Kegelschnitten gibt es keine Kegelschnitte mehr, welche Φ vierfach berühren, ohne durch d zu gehen.

Denn sei $[\mathfrak{K}]$ ein Quadrupel, in welchem ein die Φ vierfach berührender Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ existirt, so muss der Kegelschnitt K, welcher durch $[\mathfrak{K}]$ und den Doppelpunkt d bestimmt ist, die Curve Φ noch in zwei Punkten treffen, deren Tangenten durch d gehen. In dem Büschel von Curven 4ter Ordnung

$$\Phi - \lambda K^2 = 0,$$

welche alle in d einen Doppelpunkt besitzen, muss diejenige, welche mit $\mathfrak{K}$ noch einen Punkt gemeinschaftlich hat, in $\mathfrak{K}$ und einen anderen Kegelschnitt K' zerfallen, also muss K', da $\mathfrak{K}$ nicht durch d geht, in d einen Doppelpunkt besitzen, mithin in zwei Gerade T, T' zerfallen. Aus der Identität

$$\Phi - \lambda' K^2 \equiv T.T'.\mathfrak{K}$$

folgt aber dann, dass sowohl T als T' die Φ in den Schnittpunkten von K berühren.

Geht aber der Kegelschnitt K, welcher das Quadrupel $[\mathfrak{K}]$ mit d verbindet durch zwei der Berührungspunkte der Tangenten aus d, so ist der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ in einem der 30 erwähnten Systeme enthalten, und alle Kegelschnitte, welche durch die Berührungspunkte gehen und in d den K berühren, schneiden das System aus, zu welchem $[\mathfrak{K}]$ gehört.

Anmerkung. Die Quadrupel $[\mathfrak{K}]$ können, wenn von d an Φ sechs Tangenten gehen, die ausserhalb d berühren, nicht aus zwei Paaren $a\alpha, b\beta$ der $g_2{}^1$ bestehen. Denn würde ein Quadrupel aus den beiden Paaren $a\alpha, b\beta$ auf A und B bestehen, so würde der obige Kegelschnitt $K \equiv AB$ werden, und aus der Identität

$$\Phi - \lambda' A^2 B^2 \equiv T.T'.\mathfrak{K}$$

würde folgen, dass $T=0$ ebenso wie $T'=0$ mit $\Phi=0$ in d vier Punkte gemeinschaftlich hätte, dass also $T=0$ und $T'=0$ Wendetangenten im Doppelpunkt von Φ wären. Dann gehen aber an Φ nur mehr vier Tangenten, die ausserhalb berühren. Diesen entsprechen 12 Systeme von Quadrupeln, in denen keine Paare

---

$\mathfrak{K}$ einem Netze angehören, in dem $T_1 T_2 = 0$ ein Kegelschnitt ist. Vergl. Ameseder „Geometrische Untersuchung der ebenen Curven 4. Ordnung, II. Mittheilung. Sitzungsber. d. kais. Akademie, Bd. LXXXVII, p. 40.

$a\alpha$ i. A. auftreten; dasselbe gilt von weiteren 16 besonderen Systemen dieser Curve. Zwei der Systeme bestehen dann aus lauter Paaren $a\alpha$, $b\beta$. Die sie ausschneidenden Geraden bilden zwei quadratische Involutionen in d.[1] (Vergl. II der zweiten Abtheilung, S. 32.)

15. Zwei Quadrupel, welche demselben Systeme angehören, liegen stets auf einem Kegelschnitte.

Zwei Quadrupel $[\mathfrak{K}]$ und $[\mathfrak{K}']$, welche conjungirten Systemen angehören, bilden die Basis eines Büschels von Curven 3ter Ordnung, dessen 9ter Punkt der Doppelpunkt von Φ ist.

Wir beweisen diess, indem wir zeigen, dass sich immer ein System Θ von Kegelschnitten angeben lässt, welches $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ je doppelt berührt und aus Φ die Paare $a\alpha$ auf den Strahlen A durch d ausschneidet. Ist

$$\Phi \equiv (T_1^2+T_2^2)\,T_{12}^2+2H\,T_1\,T_2=0 \tag{13}$$

die Gleichung der Curve 4ter Ordnung, so ergibt sich Φ durch Elimination von λ aus den beiden Gleichungen:

$$T_1-\lambda T=0$$

$$\Theta\equiv (T_1-\lambda T_2)(M-\lambda N)+T_{12}^2(1+\lambda^2)+2H\lambda=0, \tag{14}$$

wobei

$$M=m_1\,T_1+m_2\,T_2+m_3\,T_{12}$$
$$N=n_1\,T_1+n_2\,T_2+n_3\,T_{12}$$

ist. Die Constanten m_i, n_i sollen dann so bestimmt werden, dass die Enveloppe des Systems der Kegelschnitte $\Theta=0$ aus den beiden Kegelschnitten

$$\begin{aligned}\mathfrak{K}&\equiv H-T_{12}^2-2\mu_1(T_1+T_2)\,T_{12}-2\mu_1^2\,T_1\,T_2=0\\ \mathfrak{K}'&\equiv H+T_{12}^2-2\mu_2(T_1-T_2)\,T_{12}-2\mu_2^2\,T_1\,T_2=0\end{aligned} \tag{15}$$

besteht. Denn dann wissen wir aus I. 3., dass die acht Berührungspunkte beider Kegelschnitte die Basispunkte eines Büschels von Curven 3ter Ordnung sind, dessen 9ter Punkt der Doppelpunkt von Φ ist.

Nun ist die Envelope $\mathfrak{K}_4$ des Systems der Kegelschnitte $\Theta=0$ aus (14) gegeben durch

$$\mathfrak{K}_4\equiv[H-{}^1\!/_2\,T_1N-{}^1\!/_2\,T_2M]^2-[T_{12}^2+T_1M][T_{12}^2+T_2N]=0,$$

und soll

$$\mathfrak{K}_4\equiv\rho\,\mathfrak{K}.\mathfrak{K}'$$

werden, so ersieht man, dass $\rho=1$ ist, da sowohl in $\mathfrak{K}_4$, als in $\mathfrak{K}.\mathfrak{K}'$ der Coëfficient von $H^2-T_{12}^2$ gleich 1 ist. Die Identität muss daher die Form:

$$\begin{aligned}&[H-{}^1\!/_2\,T_1(n_1\,T_1+n_2\,T_2+n_3\,T_{12})-{}^1\!/_2\,T_2(m_1\,T_1+m_2\,T_2+m_3\,T_{12})]^2\\ &\qquad-[T_{12}^2+T_1(m_1\,T_1+m_2\,T_2+m_3\,T_{12})]\,[T_{12}^2+T_2(n_1\,T_1+n_2\,T_2+n_3\,T_{12})]\\ &\qquad\equiv[H-T_{12}^2-2\mu_1(T_1+T_2)\,T_{12}-2\mu_1^2\,T_1\,T_2]\,[H+T_{12}^2-2\mu_2(T_1-T_2)\,T_{12}-2\mu_2^2\,T_1\,T_2]\end{aligned}$$

haben. Da nun rechter Hand ausser in H^2 Glieder mit T_1^4 und T_2^4 nicht auftreten, so muss $n_1=0$ und $m_2=0$ sein. Man erhält daher:

---

[1] Herr Brill findet aus dem Jakobi'schen Umkehrproblem in seiner Abhandlung: „Über diejenigen Curven, deren Coordinaten sich als hyperelliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen", Crelle, Bd. LXV, p. 283, sowie auch in der „Note über Doppeltangenten einer Curve 4ter Ordnung mit einem Doppelpunkte", Mathem. Annalen, Bd. VI, p. 66, für die Curve 4ter Ordnung mit einem Doppelpunkte 31 Systeme vierfach berührender Kegelschnitte. Das einunddreissigste, dort durch die Charakteristik 00001 bestimmte System, ist dasjenige, welches aus den doppelt gezählten Geraden, die durch den Doppelpunkt von Φ gehen, besteht. Dies ist aus der Betrachtung, die in I., 4. angestellt wurde, sofort ersichtlich, da aus derselben hervorgeht, dass diese Geraden immer ein solches System bilden. Die Curve Φ ist eine specielle Curve des dort betrachteten Büschels von Curven 4ter Ordnung, auf denen allen der Büschel von Curven 3ter Ordnung ein System von Quadrupeln ausscheidet, in welchen vierfach berührende Kegelschnitte möglich sind, die nicht aus doppelt gezählten Geraden der Ebene bestehen. Vergl. hierüber Ameseder „Geometrische Untersuchung der ebenen Curven 4. Ordnung, II. Mittheilung. Sitzungsber. der kais. Akademie, Bd. LXXXVII, p. 43, — und Lindemann (Clebsch) „Vorlesungen über Geometrie", p. 879.

$$[H-\tfrac{1}{2}(n_2+m_1)T_1T_2-\tfrac{1}{2}n_3T_1T_{12}-\tfrac{1}{2}m_3T_2T_{12}]^2-[T_{12}^2+m_1T_1^2+m_3T_1T_{12}][T_{12}^2+n_2T_2^2+n_3T_2T_{12}]$$
$$\equiv[H-T_{12}^2-2\mu_1(T_1+T_2)T_{12}-2\mu_1^2T_1T_2][H+T_{12}^2-2\mu_2(T_1-T_2)T_{12}-2\mu_2^2T_1T_2]$$

Durch Vergleichung der Coëfficienten von HT_1T_{12} und HT_2T_{12} oder auch der Coëfficienten von $T_2T_{12}^3$ und $T_1T_{12}^3$ erhält man

$$n_3=2(\mu_1+\mu_2)\qquad m_3=2(\mu_1-\mu_2).$$

Die Coëfficienten von $T_1^2T_{12}^2$ und $T_2^2T_{12}^2$ liefern die Gleichungen

$$\tfrac{1}{4}n_3^2-m_1=4\mu_1\mu_2\qquad \tfrac{1}{4}m_3^2-n_2=-4\mu_1\mu_2,$$

aus denen sich

$$n_2=(\mu_1+\mu_2)^2\qquad m_1=(\mu_1-\mu_2)^2$$

ergibt. Die übrigen sich ergebenden Relationen werden sämmtlich durch diese Werthe von m_1, m_3 und n_2, n_3 erfüllt, und wir haben daher folgendes Resultat, wenn wir in (14) die Werthe für m_i, n_i einsetzen:

Erzeugt man die Curve Φ durch den Strahlenbüschel $T_1-\lambda T_2=0$ und das System der Kegelschnitte

$$\Theta=[T_{12}+(\mu_1-\mu_2)T_1]^2+2[H-(\mu_1^2+\mu_2^2)T_1T_2-(\mu_1+\mu_2)T_1T_{12}-(\mu_1-\mu_2)T_1T_{12}]\lambda + [T_{12}+(\mu_1+\mu_2)T_2]^2\lambda^2=0, \tag{16}$$

so wird die Enveloppe des Systems der Kegelschnitte die Gleichung $\mathfrak{K}_4=0$ haben, wobei

$$\mathfrak{K}_4\equiv[H-(\mu_1^2+\mu_2^2)T_1T_2-(\mu_1+\mu_2)T_1T_{12}-(\mu_1-\mu_2)T_1T_2]^2-[T_{12}+(\mu_1-\mu_2)T_1]^2[T_{12}+(\mu_1+\mu_2)T_2]^2$$
$$\equiv[H-T_{12}^2-2\mu_1(T_1+T_2)T_{12}-2\mu_1^2T_1T_2][H+T_{12}-2\mu_2(T_1-T_2)T_{12}-2\mu_2^2T_1T_2] \tag{17}$$

sich ergibt, also $\mathfrak{K}_4\equiv\mathfrak{K}.\mathfrak{K}'$ ist, d. h. die Enveloppe besteht aus den beiden Kegelschnitten conjugirter Systeme $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$ (15).

16. Dass der Kegelschnitt $\Theta=0$ Gl. (16) sowohl $\mathfrak{K}$ als $\mathfrak{K}'$ doppelt berührt, ergibt sich nun einfach. Es ist nämlich

$$\Theta-2\lambda\mathfrak{K}\equiv[T_{12}+(\mu_1-\mu_2)T_1+\lambda(T_{12}+(\mu_1+\mu_2)T_2)]^2$$
$$\Theta-2\lambda\mathfrak{K}'\equiv[T_{12}+(\mu_1-\mu_2)T_1-\lambda(T_{12}+(\mu_1+\mu_2)T_2)]^2 \tag{18}$$

woraus folgt, dass der Kegelschnitt $\Theta=0$ von $\mathfrak{K}=0$, resp. $\mathfrak{K}'=0$ doppelt berührt wird in den Schnittpunkten mit den Geraden

$$[T_{12}+(\mu_1-\mu_2)T_1]+\lambda[T_{12}+(\mu_1+\mu_2)T_2]=0$$
$$[T_{12}+(\mu_1-\mu_2)T_1]-\lambda[T_{12}+(\mu_1+\mu_2)T_2]=0. \tag{19}$$

Diese Gleichungen zeigen, dass die Berührungspunkte des variablen Kegelschnittes Θ auf $\mathfrak{K}$, resp. $\mathfrak{K}'$ je eine quadratische Involution bilden, deren Centrum für $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ derselbe Punkt s der Ebene ist. Die Berührungssehnen selbst, welche zu einem und demselben Kegelschnitte Θ gehören, bilden in s eine quadratische Strahleninvolution, deren Doppelstrahlen die doppelt zu zählenden Geraden des Systems der Θ sind, die sich für $\lambda=0$ und $\lambda=\infty$ ergeben. Diese Doppelstrahlen gehen durch die Punkte t_1, resp. t_2.

17. Der Scheitel s der Strahleninvolution ist der vierte Schnittpunkt der Kegelschnitte K und K', welche durch die Quadrupel [$\mathfrak{K}$], [$\mathfrak{K}'$] und d, sowie t_1, t_2 gehen. Denn aus den Gleichungen (11) und (11a) folgt, wenn man in ersterer μ_1, in letzterer μ_2 an Stelle von μ setzt:

$$K-K'\equiv 2T_2[T_{12}+(\mu_1-\mu_2)T_1]$$
$$K+K'\equiv 2T_1[T_{12}+(\mu_1+\mu_2)T_2]$$

woraus der Beweis der obigen Behauptung sich ergibt. Der Punkt s ist auch eine Ecke des den beiden Kegelschnitten $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ gleichzeitig conjungirten Dreieckes, und die Doppelstrahlen der Involution (19) tragen je zwei Schnittpunkte der Kegelschnitte, wie aus Nachstehendem folgt.

Führen wir der besseren Übersicht halber die folgenden abkürzenden Bezeichnungen ein:

$$T_{12}+(\mu_1-\mu_2)\,T_1=\tau_1$$
$$T_{12}+(\mu_1+\mu_2)\,T_2=\tau_2$$
$$H-(\mu_1^2+\mu_2^2)\,T_1\,T_2-(\mu_1+\mu_2)\,T_1\,T_{12}-(\mu_1-\mu_2)\,T_2\,T_{12}=\eta,$$

so wird die Gleichung (16) des Systems der Kegelschnitte die Form haben:

$$\Theta=\tau_1^2+2\eta\lambda+\tau_2^2\lambda^2=0. \tag{22}$$

Dieses System erzeugt mit dem Strahlenbüschel

$$T_1-\lambda\,T_2=0$$

die Curve

$$\Phi\equiv\tau_1^2\,T_2^2+2\eta\,T_1\,T_2+\tau_2^2\,T_1^2=0 \tag{23}$$

und es ist aus (17)

$$\mathfrak{K}_4\equiv(\eta^2-\tau_1^2\tau_2^2), \tag{24}$$

so dass

$$\mathfrak{K}\equiv\eta-\tau_1\tau_2$$
$$\mathfrak{K}'\equiv\eta+\tau_1\tau_2 \tag{25}$$

ist, wie man leicht verificirt. Hieraus folgt, dass die Geraden $\tau_1=0$, $\tau_2=0$ durch die vier Schnittpunkte der Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ gehen. Diese Punkte werden auf ihnen durch den Kegelschnitt $\eta=0$ ausgeschnitten.

18. Man kann nun auch leicht die Gleichung des Curvenbüschels 3ter Ordnung aufstellen, welcher durch die beiden Quadrupel $[\mathfrak{K}]$ und $[\mathfrak{K}']$ bestimmt ist.

Aus (23) und (24) folgt nämlich

$$\begin{aligned}T_1^2\mathfrak{K}_4+\tau_1^2\Phi&\equiv(T_1\eta+\tau_1^2\,T_2)^2\\ T_2^2\mathfrak{K}_4+\tau_2^2\Phi&\equiv(T_2\eta+\tau_2^2\,T_1)^2,\end{aligned} \tag{26}$$

wie bereits in I., 3., Gleichung (5) allgemein gezeigt wurde. Setzt man

$$\begin{aligned}\varphi_1&=T_1\eta+\tau_1^2\,T_2\\ \varphi_2&=T_2\eta+\tau_2^2\,T_1\end{aligned} \tag{27}$$

so ist

$$\varphi_1\,T_2+\varphi_2\,T_1\equiv\Phi,$$

d. h. der Büschel Curven 3ter Ordnung

$$\varphi_1+\lambda\varphi_2\equiv\eta(T_1+\lambda\,T_2)+\tau_1^2\,T_2+\lambda\tau_2^2\,T_1=0 \tag{28}$$

erzeugt mit dem Strahlenbüschel $T_1-\lambda\,T_2=0$ die Curve Φ und ist eben jener Büschel, der die beiden Quadrupel $[\mathfrak{K}]$ und $[\mathfrak{K}']$ zu Basispunkten hat, denn nach (26) geht sowohl $\varphi_1=0$ als $\varphi_2=0$ durch diese Punkte.

Die Curve dieses Büschels, welche dem Parameter λ entspricht, schneidet auch $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ in denselben Punkten, in denen sie von Θ berührt werden, oder durch welche die Berührungssehnen (19) gehen, deren Gleichung durch die eingeführten kürzeren Bezeichnungen

$$\tau_1+\lambda\tau_2=0 \qquad \tau_1-\lambda\tau_2=0$$

werden.

Die Kegelschnitte K und K' werden von den Curven 3ter Ordnung des Büschels (28) nur mehr je in einem Punkte getroffen und es liegen die beiden Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, in welchen eine Curve K und K' trifft, mit dem Doppelpunkte d von Φ auf einem Strahle, der durch T_1, T_2 harmonisch getrennt wird von demjenigen, welcher das Paar von Φ trägt, das dieselbe Curve 3ter Ordnung ausschneidet.

Denn die Curve (28) trifft den Strahl $T_1 - \lambda T_2 = 0$ in dem Paare $a\alpha$ auf Φ und für den Strahl $T_1 + \lambda T_2 = 0$ folgt aus (28)

$$\varphi_1 T_2 - \varphi_2 T_1 \equiv [\tau_1 T_2 - \tau_2 T_1][\tau_1 T_2 + \tau_2 T_1] \equiv -K.K',$$

so dass er die Curve $\varphi_1 + \lambda\varphi_2 = 0$ auf $K = 0$ oder $K' = 0$ treffen muss, wobei K und K' aus (11) und 11 a)

$$K = 2\mu_1 T_1 T_2 + (T_1 + T_2) T_{12}$$
$$K' = 2\mu_2 T_1 T_2 + (T_1 - T_2) T_{12}$$

folgen.

19. Fassen wir die Resultate zusammen, so ergeben sich folgende Sätze: Zwei Quadrupel $[\mathfrak{K}]_{ik}$ und $[\mathfrak{K}']_{ik}$ aus den conjugirten Systemen $[ik]$ und $[ik]'$, in denen die Curve Φ von den Kegelschnitten $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ berührt wird, bilden die Basis eines Curvenbüschels 3ter Ordnung, dessen 9ter Punkt der Doppelpunkt d von Φ ist. Die Curven dieses Büschels schneiden $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ je in Punktepaaren einer Involution, deren Centrum für $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ derselbe Punkt s ist. Die Strahlen von s, welche die Punktepaare auf $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ ausschneiden, durch welche dieselbe Curve des Büschels 3ter Ordnung geht, bilden eine quadratische Strahleninvolution, deren Doppelstrahlen nach den zwei Punkten t_i, t_k von Φ gehen. Diese Punkte t_i, t_k liegen auch auf den beiden Kegelschnitten K, K', welche durch die Quadrupel $[\mathfrak{K}]_{ik}$, resp. $[\mathfrak{K}']_{ik}$ und d gehen. Der Punkt s ist der vierte Schnittpunkt von K und K', sowie eine Ecke des den Kegelschnitten $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ gleichzeitig conjugirten Dreieckes. Jede Curve 3ter Ordnung φ des obigen Büschels, welche Φ in dem Punktepaare $a\alpha$ auf dem Strahl A schneidet, trifft K und K' noch in den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, die auch auf einem Strahle A' von d liegen. Die Strahlen A, A' bilden eine quadratische Involution, deren Doppelstrahlen T_i und T_k sind. Die Punktepaare, in denen die Curve φ die Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ trifft, liegen mit $a\alpha$ auf einem Kegelschnitte Θ, der $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ doppelt berührt.

20. Hat man umgekehrt zwei Quadrupel $[\mathfrak{K}]$ und $[\mathfrak{K}_1]$, in denen die Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ die Φ berühren und geht durch $[\mathfrak{K}]$ und $[\mathfrak{K}_1]$ ein Büschel nicht zerfallender Curven 3ter Ordnung, dessen 9ter Punkt der Doppelpunkt d von Φ ist, so liegen $[\mathfrak{K}]$ und $[\mathfrak{K}_1]$ in conjugirten Systemen.

Vor allem ist klar, dass $[\mathfrak{K}]$ und $[\mathfrak{K}_1]$ nicht in demselben Systeme liegen können, da sie sonst auf einem Kegelschnitte lägen, also der Büschel Curven 3ter Ordnung diesen Kegelschnitt als festen Bestandtheil enthielte.

Es seien K und K_1 die Kegelschnitte, welche durch den Doppelpunkt d und $[\mathfrak{K}]$, resp. $[\mathfrak{K}_1]$ gehen. Schneidet nun K die Curve Φ noch in den Punkten t_i, t_k, so muss auch K_1 durch diese Punkte hindurchgehen. Denn sei φ_i die Curve 3ter Ordnung des vorausgesetzten Büschels, welche durch t_i geht, so berührt sie daselbst Φ, da die Curven φ die $g_2^{(1)}$ ausschneiden und t_i ein zusammenfallendes Paar vorstellt. Die zwölf Schnittpunkte von Φ mit φ_i sind daher $[\mathfrak{K}]$, $[\mathfrak{K}_1]$, d, d, t_i, t_i. Nun geht die Curve 4ter Ordnung $K.K_1$ durch elf dieser Punkte, nämlich K durch $[\mathfrak{K}]$, d, t_i und K_1 durch $[\mathfrak{K}_1]$, d, also muss sie noch den 12. Punkt enthalten, d. h. K_1 muss durch t_i gehen.

Ebenso folgt, dass K_1 durch t_k geht, und hieraus, dass $[\mathfrak{K}]$ und $[\mathfrak{K}_1]$ zu conjungirten Systemen gehören. Hält man $[\mathfrak{K}_1]$ fest, so wird der Büschel Curven 3ter Ordnung, welcher durch $[\mathfrak{K}_1]$ geht, in d irgend eine Curve φ durch $[\mathfrak{K}]$, $[\mathfrak{K}_1]$, die noch in $a\alpha$ schneidet, berührt und nebstbei die Punkte $a\alpha$ enthält, aus Φ das System der $[\mathfrak{K}]$ ausschneiden. Die Tangente von φ, sowie A, auf der $a\alpha$ liegen, bilden ein Paar der projectivischen Strahlenbüschel, welche in d durch die Strahlen A und die Tangenten der Curven φ, welche die Paare $a\alpha$ enthalten, bestimmt werden.

21. Nimmt man daher zwei Quadrupel $[\mathfrak{K}]_{ik}$ und $[\mathfrak{K}]_{hl}$, die verschiedenen nicht conjugirten Systemen angehören, so muss der Büschel von Curven 3ter Ordnung, welcher diese acht

Punkte zu Basispunkten hat, auf Φ ein System von Quadrupeln ausschneiden, indem der 9te Basispunkt d' des Büschels ausserhalb Φ fällt.

Nun wurde in I, 4. gezeigt, dass der Punkt d' Doppelpunkt einer Curve Φ' der 4ten Ordnung ist, welche Φ in den acht Punkten $[\mathfrak{K}]_{ik}$ und $[\mathfrak{K}]_{hl}$ berührt, und dass der Büschel von Curven 3ter Ordnung aus dieser dann die $g_2^{(1)}$ ausschneidet.

Zufolge des vorhergehenden Satzes gehören also für diese Curve Φ' die Kegelschnitte $\mathfrak{K}_{ik}$ und $\mathfrak{K}_{hl}$, welche in $[\mathfrak{K}]_{ik}$ und $[\mathfrak{K}]_{hl}$ die Φ, also auch Φ' berühren, zu conjungirten Systemen und die beiden Kegelschnitte, welche $[\mathfrak{K}]_{ik}$ und $[\mathfrak{K}]_{hl}$ mit d' verbinden, schneiden einander noch in zwei Punkten auf Φ', deren Tangenten durch d' gehen, und überdies in einem Punkte s, welcher eine Ecke des den Kegelschnitten $\mathfrak{K}_{ik}$, $\mathfrak{K}_{hl}$ conjungirten Dreieckes ist. Durch diesen Punkt s gehen die Strahlen, welche die Punktepaare tragen, in denen $\mathfrak{K}_{ik}$ und $\mathfrak{K}_{hl}$ von den Curven des Büschels 3ter Ordnung getroffen werden und die Strahlenpaare, welche die Schnittpunkte derselben Curve 3ter Ordnung mit $\mathfrak{K}_{ik}$ und $\mathfrak{K}_{hl}$ enthalten, bilden eine quadratische Strahleninvolution in s.

Die Curven des Büschels 3ter Ordnung mögen auf Φ die Quadrupel $[\mathfrak{K}]_{mn}$ ausschneiden und $\mathfrak{K}_{mn}$ sei der Φ in einem solchen Quadrupel berührende Kegelschnitt des Systems $[mn]$. Dann schneidet $\mathfrak{K}_{mn}$ die Curve 3ter Ordnung, welche das Quadrupel $[\mathfrak{K}]_{mn}$ ausschneidet, noch in zwei Punkten $a'\alpha'$ von Φ', so dass also die Gerade $a'\alpha'$ stets durch d' geht.

Sei φ die Curve des Büschels, welche durch d geht, dann wissen wir, dass sie Φ noch in den Punkten $t_m t_n$ trifft, und dass die Tangenten $T_m T_n$ in diesen Punkten auch einen Kegelschnitt der Schaar vorstellen, die durch den Büschel der Curven 3ter Ordnung bestimmt wird. Schneidet φ die Geraden T_m und T_n ausser in d und t_m, resp. t_n noch in $a'\alpha'$, so liegen diese Punkte auf Φ' und die Gerade $a'\alpha'$ geht durch d'.

Nach einem bekannten Satze über Curven 3ter Ordnung werden dann alle Kegelschnitte K_{mn}, welche die Curve φ in d berühren und durch t_m und t_n gehen, die Curve φ noch in Punktepaaren schneiden, deren Verbindungsgeraden durch d' gehen. Die Kegelschnitte K_{mn} sind aber gerade diejenigen, welche nach 10) die Schaar der Quadrupel $[\mathfrak{K}]_{mn}$ aus Φ ausschneiden, und wir haben daher folgende Sätze:

Die acht Punkte zweier Quadrupel, die verschiedenen nicht conjungirten Systemen $[ik]$, $[hl]$ angehören, in denen die Kegelschnitte $\mathfrak{K}_{ik}$ und $\mathfrak{K}_{hl}$ die Φ berühren, bilden die Basis eines Curvenbüschels 3ter Ordnung, dessen 9ter Punkt d' nicht auf Φ liegt, und dessen Curven aus Φ ein drittes System $[mn]$ von Quadrupeln ausschneiden. Die Kegelschnitte K_{mn}, welche diese Quadrupel aus dem Doppelpunkte d von Φ projiciren, schneiden die Curve φ des Büschels, welche durch d geht, nur noch in einem beweglichen Punktepaar, dessen Verbindungsgerade durch d' hindurch geht. Die Curven des Büschels 3ter Ordnung durch die acht Punkte schneiden die Kegelschnitte $\mathfrak{K}_{ik}$, sowie $\mathfrak{K}_{hl}$, welche in dem einen und andern Quadrupel die Φ berühren, in je einer quadratischen Involution. Beide Involutionen haben einen gemeinschaftlichen Pol in s, einer Ecke des $\mathfrak{K}_{ik}$ und $\mathfrak{K}_{hl}$ gleichzeitig conjungirten Dreieckes. Die Strahlen, welche die Paare auf $\mathfrak{K}_{ik}$ und $\mathfrak{K}_{hl}$ ausschneiden, die auf derselben Curve 3ter Ordnung liegen, bilden in s eine quadratische Involution, deren Doppelstrahlen die Schnittpunkte der Kegelschnitte $\mathfrak{K}_{ik}$ und $\mathfrak{K}_{hl}$ tragen.

22. Es lassen sich auch leicht aus den Zahlen i, k, h, l, welche für die zwei Systeme $[ik]$ und $[hl]$ charakteristisch sind, die Zahlen für das von den Curven 3ter Ordnung durch die beiden Quadrupel ausgeschnittene dritte System $[mn]$ angeben, und zwar durch folgende Sätze:

a) Sind i, k, h, l vier von einander verschiedene Zahlen aus der Reihe 1, 2, 3, 4, 5, 6, so sind m, n die zwei noch übrigen Zahlen.

Denn man kann zeigen, dass die d enthaltende Curve φ, welche durch die beiden Quadrupel $[\mathfrak{K}]_{ik}$ und $[\mathfrak{K}]_{hl}$ geht, dann Φ nur in den Punkten t_m, t_n schneiden kann, wo m, n von i, k, h, l verschieden sein muss. Gesetzt nämlich, φ ginge durch t_i, dann muss noch ein Punkt t_h oder t_l auf φ liegen. Denn φ wird dann von der Curve 4ter Ordnung Φ geschnitten in $[\mathfrak{K}]_{ik}$, $[\mathfrak{K}]_{hl}$, d, d, t_i, $t_{h'}$. Nun geht die Curve 4ter Ordnung, die aus

den beiden Kegelschnitten K_{ik} und K_{hl} besteht, die durch $[\mathfrak{K}]_{ik}$, resp. $[\mathfrak{K}]_{hl}$ und d gehen, durch die ersten elf Punkte auf φ, also müssen sich Φ und K_{hl} auf φ schneiden, d. h. h' ist entweder h oder l. Es kann h' nicht mit k zusammenfallen, da sonst K_{ik} mit φ sieben Punkte gemeinschaftlich hätte.

Ist nun $h = h'$, so geht φ durch t_i und t_h und es muss die Curve 4ter Ordnung des Büschels

$$\Phi - \lambda K_{ik} K_{hl} = 0,$$

welche durch einen willkürlichen Punkt von φ geht, diese als Theil enthalten. Der übrige Theil ist die Gerade $t_k t_l$, die nicht durch den Doppelpunkt d von Φ geht. Da aber d Doppelpunkt aller Curven des obigen Büschels ist, so müsste φ in d einen Doppelpunkt haben, könnte also Φ ausser in d, $[\mathfrak{K}]_{ik}$ und $[\mathfrak{K}]_{hl}$ nicht mehr schneiden. Dies kann aber, wenn in den Doppelpunkt von Φ kein Wendepunkt von Φ fällt, nicht eintreten. Es muss also φ die Φ in den Punkten t_m, t_n schneiden, wobei m, n von i, k, h, l verschieden ist. Hieraus folgt dann, dass das System der Quadrupel, welche der Büschel von Curven 3ter Ordnung aus φ ausschneidet, das System $[m, n]$ ist.

b) Analog wird gezeigt, dass, wenn $i = h$ ist, dann $[mn] = [kl]$ wird; d. h. legt man durch zwei der Quadrupel $[\mathfrak{K}]_{ik}$ und $[\mathfrak{K}]_{il}$ ein Büschel von Curven 3ter Ordnung, so schneiden die Curven die Quadrupel des Systems $[kl]$ aus.

Nimmt man statt der Quadrupel aus den Systemen $[ik]$ und $[hl]$ Quadrupel aus den conjungirten Systemen $[ik]'$ und $[hl]'$, so ergibt sich wieder das System $[mn]$. Denn nimmt man ein Quadrupel aus $[ik]$ und eines aus $[hl]'$, oder combinirt man zwei Quadrupel aus $[ik]'$ und $[hl]$, so erhält man das System $[mn]'$, welches zu $[mn]$ conjungirt ist, was sich aus Folgendem ergibt.

Der Büschel Curven 3ter Ordnung, welcher durch das Quadrupel $[\mathfrak{K}]_{ik}$, sowie t_m, t_n geht und in d die Curve φ berührt, welche durch $[\mathfrak{K}]_{ik}$ und $[\mathfrak{K}]_{hl}$ und d ging, deren Tangente in d nach Früherem die Gerade $\mathfrak{T}_{mn}$ sein muss, schneidet nämlich aus Φ das System $[hl]$ aus, denn man zeigt leicht, dass die Quadrupel, welche dieser Büschel aus Φ ausschneidet, auch von den Kegelschnitten durch $[\mathfrak{K}]_{hl}$ ausgeschnitten werden. Legt man daher die Curve 3ter Ordnung φ' durch $[\mathfrak{K}]_{ik}$ und ein Quadrupel, $[\mathfrak{K}]'_{hl}$, welches in dem zu $[hl]$ conjungirten System $[hl]'$ liegt, sowie durch d, so muss φ' nach Früherem jedenfalls durch t_m, t_n gehen, kann aber in d nicht $\mathfrak{T}_{mn}$ berühren, muss also $\mathfrak{T}'_{mn}$ berühren, da wieder die Curven, welche φ' in d berühren, durch t_m, t_n und $[\mathfrak{K}]_{ik}$ gehen, das System ausschneiden, in welchem $[\mathfrak{K}]'_{hl}$ enthalten ist, also das zu dem früheren conjungirte.

Da nun die Curve φ', welche durch $[\mathfrak{K}]_{ik}$ und $[\mathfrak{K}]'_{hl}$ geht, in d die Gerade $\mathfrak{T}'_{mn}$ berührt, so schneiden die Curven des Büschels durch $[\mathfrak{K}]_{ik}$ und $[\mathfrak{K}]'_{hl}$ das System $[mn]'$ aus, welches zu $[mn]$, das die Curven durch $[\mathfrak{K}]_{ik}$ und $[\mathfrak{K}]_{hl}$ ausschnitten, conjungirt ist.

III. Die Doppeltangenten der Curve 4ter Ordnung mit einem Doppelpunkte.

23. In dem Systeme [12] der vierfach berührenden Kegelschnitte, dessen Gleichung in II, 12. aufgestellt wurde

$$\mathfrak{K} \equiv H - T_{12}^2 - 2\mu(T_1 + T_2)\, T_{12} - 2\mu^2\, T_1\, T_2 = 0 \tag{1}$$

kommen sechs in Geradenpaare zerfallende Kegelschnitte vor. Unter diesen zählt aber das Geradenpaar $T_1 . T_2 = 0$, welches sich für $\mu = \infty$ ergibt, doppelt und die vier übrigen Werthe von μ ergeben sich aus der Gleichung, die durch Nullsetzen der Discriminante von 1) entsteht, die sich in μ auch blos vom vierten Grade erweist.

Diese vier Geradenpaare, die zerfallende Kegelschnitte von (1) darstellen, sind offenbar acht Doppeltangenten der Curve 4ter Ordnung Φ.

In dem conjungirten System $[12]'$, dessen Gleichung

$$\mathfrak{K}' \equiv H + T_{12}^2 - 2\mu(T_1 - T_2)\, T_{12} - 2\mu^2\, T_1\, T_2 = 0 \tag{2}$$

ist, treten offenbar auch acht Doppeltangenten als vier in Geradenpaare zerfallende Kegelschnitte des Systems auf und diese acht Doppeltangenten müssen von den ersteren verschieden sein.

Die Curve Φ kann aber sonst keine Doppeltangente besitzen. Denn sei D eine Doppeltangente von Φ, welche in δ, δ_1 berührt, so lege man durch δ, δ_1, t_1, t_2 und d den Kegelschnitt K, welcher Φ noch in δ', δ_1' schneiden möge.

Die Curven des Büschels 4ter Ordnung $\Phi+\lambda K^2=0$ berühren in den Schnittpunkten von Φ mit K die Curve Φ und haben alle in d einen Doppelpunkt. Die Curve, welche daher einen Punkt von T_1 enthält, muss in T_1 und eine Curve 3ter Ordnung zerfallen, die durch d geht, in t_2 die Gerade T_2 berührt und in δ, δ_1 Φ, also auch D berühren muss. Daher zerfällt diese Curve 3ter Ordnung in D und einen Kegelschnitt, der aber wiederum in T_2 und eine Gerade D' zerfallen muss, und D' muss Φ in den zwei letzten Schnittpunkten δ', δ_1' berühren, also eine Doppeltangente von Φ sein. Daher muss DD' als vierfach berührender Kegelschnitt in dem System [12] oder [12]' auftreten.

Da nun in jedem der 30 Systeme vierfach berührender Kegelschnitte stets vier in Geradenpaare zerfallende Kegelschnitte auftreten (die nicht durch den Doppelpunkt gehen), so müssen sich die 16 Doppeltangenten in diese Systeme einordnen. Das umfasst auch $4.30 = {}^1/_2 16.15$ alle Combinationen zu Zweien der 16 Doppeltangenten.

Zufolge des in II sub **12.** bewiesenen Satze liegen die acht Berührungspunkte je zweier Paare von Doppeltangenten, die in einem System auftreten, auf einem Kegelschnitte. Solche vier Doppeltangenten treten dann aber in drei verschiedenen Systemen auf. Da in einem System vier Paare vorhanden sind, so geben diese sechs Kegelschnitte, die durch je acht Berührungspunkte zweier Paare gehen, und es sind daher im Ganzen ${}^1/_3.6.30 = 60$ Kegelschnitte vorhanden, welche durch die Berührungspunkte von vier Doppeltangenten gehen.

24. Es seien $D_i D_k$ ein Paar Doppeltangenten, welche in dem System $[i_1 k_1]$ liegen und $D_{i'} D_{k'}$ irgend ein Paar, welches in dem zum ersteren conjungirten System $[i_1 k_1]'$ liegen. Dann bilden die acht Berührungspunkte der vier Doppeltangenten die Basis eines Curvenbüschels 3ter Ordnung, dessen 9ter Punkt in d liegt und dessen Curven φ die Φ in Paaren der $g_2^{(1)}$ schneiden.

Es wurde aber in II sub **20.** auch die Umkehr dieses Satzes bewiesen und hieraus folgt für die Doppeltangenten $D_i D_k$, $D_{i'} D_{k'}$, welche ein Quadrupel bilden sollen, dass wenn $D_i D_k$ und $D_{i'} D_{k'}$ conjungirten Systemen angehören, auch $D_i D_{i'}$ und $D_k D_{k'}$ in conjungirten Systemen auftreten müssen, ebenso wie $D_i D_{k'}$ und $D_{i'} D_k$.

Wir wollen nun zeigen, dass diese drei Systeme stets **nur durch drei** von einander verschiedene Zahlen charakterisirt werden. Dass also, wenn $D_i D_k$ in $[i_1 k_1]$ liegt, dann $D_i D_{i'}$ in $[k_1 h_1]$ und $D_i D_{k'}$ in $[h_1 i_1]$ oder den conjungirten liegen muss.

Wir haben in II sub 15. gezeigt, dass zwei Kegelschnitte $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$ aus conjungirten Systemen, stets in zwei solchen Quadrupeln Φ berühren, dass der Büschel Curven 3ter Ordnung durch diese acht Punkte, die Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ noch je in Punktepaaren trifft, so zwar, dass die Curve φ in zwei Paaren schneidet, in welchen ein $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ doppelt berührender Kegelschnitt existirt, der φ noch in einem Punktepaar auf Φ trifft. Sind nun $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$ zwei Paare Doppeltangenten, so werden die berührenden Kegelschnitte die Kegelschnitte der Schaar vorstellen, welche die vier Doppeltangenten zu festen Tangenten besitzen.

Der Curvenbüschel 3ter Ordnung schneidet nun jede der Doppeltangenten in einer zu ihm projectivischen Punktreihe, also werden die Kegelschnitte der Schaar auf den Büschel Curven 3ter Ordnung projectivisch bezogen sein.

Der Curvenbüschel 3ter Ordnung ist aber projectivisch zum Strahlenbüschel, welcher aus d die Paare $a\alpha$ projicirt, in denen die Curven φ die Φ schneiden. Da durch dieses Punktepaar auch der Kegelschnitt der Schaar geht, welcher φ zugehört, so ist der Strahlenbüschel in d projectivisch auf die Schaar der Kegelschnitte durch die Paare $a\alpha$ von Φ bezogen.

Wir haben also den in I sub 7., S. 8 betrachteten Fall. Um mit den daselbst eingeführten Bezeichnungen in Übereinstimmung zu bleiben, wollen wir voraussetzen, dass das Doppeltangentenpaar $D_1 D_4$ in [12] und $D_2 D_3$ in [12]' auftritt. Die übrigen Doppeltangenten seien vor der Hand mit $D_5 D_6 \ldots D_{16}$ bezeichnet.

Transformiren wir dann die Gleichung der Curve Φ, die wir bislang in der Form S. 11, Gl. (23) voraussetzten, auf das Diagonaldreiseit des von den Doppeltangenten D_1, D_4, D_2, D_3 gebildeten Vierseites, so werden sich drei einander äquivalente Formen ergeben:

$$\begin{aligned}
\Phi_{12} &\equiv \tau_1^2 T_2^2 + (\tau_1^2 + \tau_2^2 - \tau_3^2)\, T_1 T_2 + \tau_2^2 T_1^2 \\
\Phi_{23} &\equiv \tau_2^2 T_3^2 + (\tau_2^2 + \tau_3^2 - \tau_1^2)\, T_2 T_3 + \tau_3^2 T_2^2 \\
\Phi_{31} &\equiv \tau_3^2 T_1^2 + (\tau_3^2 + \tau_1^2 - \tau_2^2)\, T_3 T_1 + \tau_1^2 T_3^2,
\end{aligned} \tag{3}$$

die gleich Null gesetzt die Gleichung derselben Curve Φ darstellen, deren vier Doppeltangenten

$$\begin{aligned}
D_1 &= \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0 \\
D_2 &= \tau_1 - \tau_2 - \tau_3 = 0 \\
D_3 &= \tau_1 - \tau_2 + \tau_3 = 0 \\
D_4 &= \tau_1 + \tau_2 - \tau_3 = 0
\end{aligned} \tag{4}$$

sind. Hiebei muss

$$\begin{aligned}
T_1 &= a_1 \tau_1 + a_2 \tau_2 + a_3 \tau_3 \\
T_2 &= b_1 \tau_1 + b_2 \tau_2 + b_3 \tau_3 \\
T_3 &= c_1 \tau_1 + c_2 \tau_2 + c_3 \tau_3 \\
T_1 &+ T_2 + T_3 \equiv 0,
\end{aligned} \tag{5}$$

d. h. $a_i + b_i + c_i = 0$ sein. Der Schnittpunkt der drei Geraden ist der Doppelpunkt d von Φ und T_1, T_2, T_3 sind drei der Tangenten von Φ, die in t_1, t_2, t_3 berühren, welche Punkte auf τ_1, τ_2, τ_3 liegen, wie in I. 7. gezeigt wurde.

Wir haben ferner in II sub 19., S. 19 gesehen, dass zwei vierfach berührende Kegelschnitte aus conjungirten Systemen einander in vier Punkten schneiden, so dass ein Paar der Schnittsehnen, durch die Berührungspunkte der Tangenten aus d gehen, welche in dem System enthalten sind.

Da nun im obigen Quadrupel sich $D_1 D_2$ und $D_4 D_3$ auf τ_1 und $D_1 D_3$ sowie $D_2 D_4$ auf τ_2 schneiden, so gehört der aus den Doppeltangenten $D_1 D_4$ bestehende Kegelschnitt dem System [12] an, und $D_2 D_3$ dem System [12]'. Das Geradenpaar $D_1 D_3$ und $D_2 D_4$ hat aber als Schnittsehnen die Geraden τ_1, τ_3, also liegen sie in dem System [13] und [13]', während $D_1 D_2$ und $D_3 D_4$, da ihre Schnittsehnen τ_2, τ_3 sind, in [23] und [23]' liegen. Welches System man mit einem Strich versieht, ist gleichgiltig. Hiemit ist die obige Behauptung, bezüglich der drei Systeme, in welchen die Doppeltangenten eines Quadrupels liegen, erwiesen.

25. Wir wollen ein solches Quadrupel von Doppeltangenten, dessen acht Berührungspunkte die Basis eines Curvenbüschels 3ter Ordnung bilden, dessen 9ter Punkt der Doppelpunkt von Φ ist, mit

$$\begin{bmatrix} D_i & D_k \\ D_h & D_l \end{bmatrix}_{mnp} \qquad (m, n, p, = 1, 2, 3, 4, 5, 6,)$$

bezeichnen, und zwar sollen dann $D_i D_k$ in dem System $[mn]$, $D_i D_h$ in dem System $[np]$ und $D_h D_k$ in dem System $[mp]$ liegen, wobei das andere Paar immer im conjungirten System auftritt.[1]

---

[1] Man kann aus den Gleichungsformen (3) und den in I für K_{ik}' abgeleiteten Kegelschnittsgleichungen (17) auch die Systeme angeben, in welchen die Doppeltangentenpaare auftreten. Man kann auch sehr leicht die Gleichung des Systems der vierfach berührenden Kegelschnitte aufstellen, welchem die einzelnen Doppeltangentenpaare angehören. Aus den Identitäten:

$$\begin{aligned}
\Phi_{12} &\equiv [\nu T_1 T_2 + \tau_1 T_2 - \tau_2 T_1]^2 + T_1 T_2 [(\tau_1 + \tau_2)^2 - \tau_3^2 - 2\nu (\tau_1 T_2 - \tau_2 T_1) - \nu^2 T_1 T_2] \\
&\equiv [\nu T_1 T_2 + \tau_1 T_2 + \tau_2 T_1]^2 + T_1 T_2 [(\tau_1 - \tau_2)^2 - \tau_3^2 - 2\nu (\tau_1 T_2 + \tau_2 T_1) - \nu^2 T_1 T_2]
\end{aligned}$$

Da in jedem System vier in Geradenpaare zerfallende Kegelschnitte auftreten, also vier Paare Doppeltangenten, eben so viele in dem conjungirten Systeme, so liefert ein System und sein conjungirtes 16 Quadrupel. Weil aber jedes Quadrupel in drei verschiedenen Systemen und den dazu conjungirten enthalten ist, so erhält man $\frac{1}{3}.16.15 = 80$ Quadrupel von Doppeltangenten.

Da jedes Quadrupel zu einer canonischen Gleichungsform (3) Anlass gibt, so ersicht man, dass es blos 80 verschiedene canonische Gleichungsformen wie (3) gibt, wobei die drei Formen (3) als nicht wesentlich verschieden von einander betrachtet werden.

Hiemit ist die in I sub 9. gemachte Bemerkung gerechtfertigt.

Die drei Diagonalen des Vierseits, welches von einem Quadrupel von Doppeltangenten gebildet wird, sind Gerade, welche zwei Schnittpunkte von Doppeltangenten enthalten und durch einen der Punkte t_i gehen. Solcher Geraden gibt es also $3.80 = 240$, und durch jeden Punkt t_i gehen mithin 40 derselben.

Durch einen Schnittpunkt zweier Doppeltangenten gehen blos vier dieser Geraden. Die zwei Doppeltangenten sind nämlich als Paar in einem System $[ik]$ enthalten, in welchem auch die Tangenten T_i, T_k auftreten. Die Geraden nun, welche den Schnittpunkt der Doppeltangenten mit den vier übrigen Punkten t_h verbinden, enthalten stets noch einen Schnittpunkt von zwei Doppeltangenten, die im System $[ik]'$ liegen, und die vier Paare dieses Systems bestimmen. Dies gibt, da es $\frac{1}{2}16.15 = 120$ Schnittpunkte der Doppeltangenten gibt, wieder oben $\frac{1}{2}.4.120 = 240$ solcher Geraden, die zwei Schnittpunkte von Doppeltangenten enthalten und durch die Punkte t_h gehen.

26. Seien nun D_i, D_k, D_h irgend drei Doppeltangenten von Φ und es mögen $D_i D_k$ in dem System $[i_1 k_1]$ $D_i D_h$ in dem System $[i_2 k_2]$ als Paar auftreten, dann liegen $D_k D_h$ in einem System $[i_3 k_3]$, wobei sich die Zahlen (i_3, k_3) aus den Zahlen (i_1, k_1) und (i_2, k_2) durch folgende Regel bestimmen: Sind (i_1, k_1) von den Zahlen (i_2, k_2) verschieden, so ist (i_3, k_3) das noch übrige Zahlenpaar der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6. Ist aber eine der Zahlen z. B. $i_2 = i_1$, so sind die Zahlen (i_3, k_3) gleich (k_1, k_2).

---

folgt, dass die Kegelschnitte

$$\mathfrak{K}_{12} \equiv D_1 D_4 - 2\nu(\tau_1 T_2 - \tau_2 T_1) - \nu^2 T_1 T_2 = 0$$
$$\mathfrak{K}'_{12} \equiv D_2 D_3 - 2\nu(\tau_1 T_2 + \tau_2 T_1) - \nu^2 T_1 T_2 = 0$$

die Curve Φ vierfach berühren, und dass in demselben nebst dem doppelt zählenden, für $\nu = \infty$ sich ergebenden Geradenpaar T_1, T_2 noch die Doppeltangenten $D_1 D_4$ in [12] und $D_2 D_3$ in [12]' für $\nu = 0$ auftreten.

Analog folgt aus

$$\Phi_{23} \equiv [\nu T_2 T_3 + \tau_2 T_3 - \tau_3 T_2]^2 + T_2 T_3 [(\tau_2 + \tau_3)^2 - \tau_1{}^2 - 2\nu(\tau_2 T_3 - \tau_3 T_2) - \nu^2 T_2 T_3]$$
$$\equiv [\nu T_2 T_3 + \tau_2 T_3 + \tau_3 T_2]^2 + T_2 T_3 [(\tau_2 - \tau_3)^2 - \tau_1{}^2 - 2\nu(\tau_2 T_3 + \tau_3 T_2) - \nu^2 T_2 T_3],$$

dass die Kegelschnitte

$$\mathfrak{K}_{23} \equiv D_1 D_2 + 2\nu(\tau_2 T_3 - \tau_3 T_2) + \nu^2 T_2 T_3 = 0$$
$$\mathfrak{K}'_{23} \equiv D_2 D_4 + 2\nu(\tau_2 T_3 + \tau_3 T_2) + \nu^2 T_2 T_3 = 0$$

dem System [23] und [23]' angehören, während aus

$$\Phi_{13} \equiv [\nu T_3 T_1 + \tau_3 T_1 + \tau_1 T_3]^2 + T_3 T_1 [(\tau_3 - \tau_1)^2 - \tau_2^2 - 2\nu(\tau_3 T_1 + \tau_1 T_3) - \nu^2 T_3 T_1]$$
$$\equiv [\nu T_3 T_1 + \tau_3 T_1 - \tau_1 T_3]^2 + T_3 T_1 [(\tau_3 + \tau_1)^2 - \tau_2^2 - 2\nu(\tau_3 T_1 - \tau_1 T_3) - \nu^2 T_3 T_1]$$

sich ergibt, dass die Kegelschnitte

$$\mathfrak{K}_{13} \equiv D_2 D_4 + 2\nu(\tau_3 T_1 + \tau_1 T_3) + \nu^2 T_3 T_1$$
$$\mathfrak{K}'_{13} \equiv D_1 D_3 - 2\nu(\tau_3 T_1 - \tau_1 T_3) - \nu^2 T_3 T_1$$

das System [13] und [13]' bilden.

In jedem der Systeme sind noch drei Paar andere Doppeltangenten enthalten. Die Discriminante der Gleichungen wird auch in ν blos vom 3ten Grade.

Die Gleichung für $\mathfrak{K}_{12}$ zeigt auch, dass $D_1 = 0$ von den Kegelschnitten des Systems [12] in einer quadratischen Involution geschnitten wird, die auch den Kegelschnittsbüschel $\nu T_1 T_2 + 2(\tau_1 T_2 - \tau_2 T_1) = 0$ auf ihr ausschneidet. Des Weiteren cfr. Ameseder l. c. S. 41.

Diese Regel folgt aus den in II sub **22.**, S. 20 bewiesenen Sätzen. Wir haben daselbst gezeigt, dass der Büschel Curven 3ter Ordnung, welcher durch die acht Berührungspunkte zweier Kegelschnitte geht, die verschiedenen nicht conjungirten Systemen angehören, ein drittes System von Quadrupeln ausschneidet, dessen charakteristischen Zahlen sich durch die eben angeführte Regel bestimmen. Nehmen wir nun die beiden Kegelschnitte D_i, D_k und D_i, D_h, die verschiedenen nicht conjungirten Systemen angehören müssen, so wird der Büschel von Curven 3ter Ordnung die Gerade D_i offenbar als festen Bestandtheil enthalten, und der Rest ist also ein Kegelschnittsbüschel durch die vier Berührungspunkte von D_k, D_h. Dieser Büschel schneidet aber ein System von Quadrupeln aus, zu dem auch seine Basispunkte gehören.

27. Die in den vorhergehenden Nummern **23.**, **24.**, **25.** und **26.** gegebenen Sätze über die Gruppirung der Doppeltangenten setzen uns in den Stand, sobald wir die Doppeltangenten einmal in Beziehung zu den Punkten t_i gesetzt haben, ihre Anordnung in alle 30 Systeme zu geben.

Wir bemerken hiezu, dass, wenn die Doppeltangenten blos als zerfallende Kegelschnitte eines Systems $[ik]$ und des conjungirten gegeben sind, hiedurch die einzelnen Doppeltangenten eines Paares von einander nicht unterschieden sind. Erst wenn wir aus irgend einem Paare und einem solchen aus dem conjungirten Systeme ein Quadrupel bilden, dem noch ein dritter Punkt t_h zugewiesen wird, werden die Doppeltangenten eines Paares getrennt, und es ist über die Punkte t_i, t_k, t_h verfügt.

Wir können nun folgende Annahmen machen: Es mögen in dem System

$$[12] \text{ die Paare } D_1 D_4, \quad D_5 D_8, \quad D_9 D_{12}, \quad D_{13} D_{16}$$

in

$$[12]' \quad " \quad " \quad D_2 D_3, \quad D_6 D_7, \quad D_{10} D_{11}, \quad D_{14} D_{15}$$

auftreten. Aus ihnen bilden wir die Quadrupel:

$$\begin{bmatrix} D_1 & D_4 \\ D_2 & D_3 \end{bmatrix}_{123} \quad \begin{bmatrix} D_5 & D_8 \\ D_6 & D_7 \end{bmatrix}_{123} \quad \begin{bmatrix} D_9 & D_{12} \\ D_{10} & D_{11} \end{bmatrix}_{123} \quad \begin{bmatrix} D_{13} & D_{16} \\ D_{14} & D_{15} \end{bmatrix}_{123}.$$

Hiedurch sind die 16 Doppeltangenten individualisirt und es ist über die Punkte t_1, t_2, t_3 verfügt worden. Über die Punkte t_4, t_5, t_6 verfügen wir durch die Quadrupel:

$$\begin{bmatrix} D_1 & D_4 \\ D_6 & D_7 \end{bmatrix}_{124} \quad \begin{bmatrix} D_1 & D_4 \\ D_{10} & D_{11} \end{bmatrix}_{125} \quad \begin{bmatrix} D_1 & D_4 \\ D_{14} & D_{15} \end{bmatrix}_{126}$$

und haben damit die willkürlichen Annahmen erschöpft, indem alle Punkte t_i in Verbindung mit den 16 individualisirten Doppeltangenten gebracht sind. In der That gelingt es nun mit Hilfe der in **26.** angegebenen Regel die Einordnung der Paare der Doppeltangenten zu je acht in die 15 Systeme $[ik]$ zu bewirken.

Legt man hiezu eine Tabelle nach Art der folgenden Tabelle I an, indem man in dem Quadrat, in welchem sich die Columne von D_i mit der Zeile von D_k schneidet, die Zahlen h, l einträgt, so dass $D_i D_k$ im System $[hl]$ liegt, so kann man zuerst die Combinationen einschreiben, die sich aus den gemachten Annahmen ergeben. Man erhält hiedurch 30 der Quadrate ausgefüllt und die sehr leicht anwendbare Regel in **26.** gibt die Ausfüllung der übrigen Quadrate.

Hiedurch hat man 15 Gruppen von je acht Paaren von Doppeltangenten und es kommt noch darauf an, in jeder Gruppe die vier Paare des einen Systems und des dazu conjungirten anzugeben. Dazu hat man erstens den Satz anzuwenden, dass die vier Doppeltangenten, deren acht Berührungspunkte auf einem Kegelschnitte liegen, stets zwei Paare eines Systems vorstellen müssen, dann aber auch den Satz, dass, wenn die vier Doppeltangenten D_i, D_k, D_h, D_l ein Quadrupel bilden, die drei Systeme, denen sie als Paare angehören, nur drei verschiedene Zahlen besitzen können. Unter einem Quadrupel von Doppeltangenten ist stets ein solches zu verstehen, wie es in **24.** betrachtet wurde.

In der Tabelle I wurden die Systeme $[ik]$ und $[ik]'$ durch die Zahlen ik und $\overline{i}k$ charakterisirt.

Tabelle I.

D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9	D_{10}	D_{11}	D_{12}	D_{13}	D_{14}	D_{15}	D_{16}	
23	$\overline{13}$	12	$\overline{34}$	24	$\overline{14}$	$\overline{56}$	$\overline{35}$	25	$\overline{15}$	$\overline{46}$	$\overline{36}$	26	$\overline{16}$	$\overline{45}$	D_1
	$\overline{12}$	13	$\overline{24}$	34	$\overline{56}$	$\overline{14}$	$\overline{25}$	35	$\overline{46}$	$\overline{15}$	$\overline{26}$	36	$\overline{45}$	$\overline{16}$	D_2
		$\overline{23}$	14	$\overline{56}$	34	24	15	$\overline{46}$	35	25	16	$\overline{45}$	36	26	D_3
			$\overline{56}$	14	$\overline{24}$	$\overline{34}$	$\overline{46}$	15	$\overline{25}$	$\overline{35}$	$\overline{45}$	16	$\overline{26}$	$\overline{36}$	D_4
				$\overline{23}$	13	12	45	$\overline{16}$	26	36	46	$\overline{15}$	25	35	D_5
					$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{16}$	45	$\overline{36}$	$\overline{26}$	$\overline{15}$	46	$\overline{35}$	$\overline{25}$	D_6
						23	26	$\overline{36}$	45	16	25	$\overline{35}$	46	15	D_7
							36	$\overline{26}$	16	45	35	$\overline{25}$	15	46	D_8
								$\overline{23}$	13	12	56	$\overline{14}$	24	34	D_9
									$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	56	$\overline{34}$	$\overline{24}$	D_{10}
										23	24	$\overline{34}$	56	14	D_{11}
											34	$\overline{24}$	14	56	D_{12}
												$\overline{23}$	13	12	D_{13}
													$\overline{12}$	$\overline{13}$	D_{14}
														23	D_{15}

Zur Erläuterung der oben angegebenen Regel diene folgende Bemerkung:

In der ersten Zeile der Tabelle stehen beispielsweise unter D_8 und D_{16} die Zahlen $\overline{56}$ und $\overline{45}$, also muss $D_8 D_{16}$ dem System [46] angehören, wie auch die Tabelle zeigt. Hingegen steht bei D_4 die Zahl 12, also muss D_8 und D_4 im System [34] liegen, welche Zahl auch in dem Quadrate steht, mit dem D_4 und D_8 in einer Zeile, resp. Columne liegen.

Schreibt man die Paare von Doppeltangenten, die in einem System liegen, nebeneinander, so erhält man aus der Tabelle I folgende Anordnung der Doppeltangenten in die 30 Systeme der vierfach berührenden Kegelschnitte:

Tabelle II.

[12]	$D_1 D_4$	$D_5 D_8$	$D_9 D_{12}$	$D_{13} D_{16}$
[12]'	$D_2 D_3$	$D_6 D_7$	$D_{10} D_{11}$	$D_{14} D_{15}$
[13]	$D_2 D_4$	$D_5 D_7$	$D_9 D_{11}$	$D_{13} D_{15}$
[13]'	$D_1 D_3$	$D_6 D_8$	$D_{10} D_{12}$	$D_{14} D_{16}$
[14]	$D_3 D_5$	$D_4 D_6$	$D_{11} D_{16}$	$D_{12} D_{15}$
[14]'	$D_1 D_7$	$D_2 D_8$	$D_9 D_{14}$	$D_{10} D_{13}$
[15]	$D_3 D_9$	$D_4 D_{10}$	$D_7 D_{16}$	$D_8 D_{15}$
[15]'	$D_1 D_{11}$	$D_2 D_{12}$	$D_5 D_{14}$	$D_6 D_{13}$
[16]	$D_3 D_{13}$	$D_4 D_{14}$	$D_7 D_{12}$	$D_8 D_{11}$
[16]'	$D_1 D_{15}$	$D_2 D_{16}$	$D_5 D_{10}$	$D_6 D_9$
[23]	$D_1 D_2$	$D_7 D_8$	$D_{11} D_{12}$	$D_{15} D_{16}$
[23]'	$D_3 D_4$	$D_5 D_6$	$D_9 D_{10}$	$D_{13} D_{14}$
[24]	$D_1 D_6$	$D_3 D_8$	$D_9 D_{15}$	$D_{11} D_{13}$
[24]'	$D_2 D_5$	$D_4 D_7$	$D_{10} D_{16}$	$D_{12} D_{14}$
[25]	$D_1 D_{10}$	$D_3 D_{12}$	$D_5 D_{15}$	$D_7 D_{13}$
[25],	$D_2 D_9$	$D_4 D_{11}$	$D_6 D_{16}$	$D_8 D_{14}$
[26]	$D_1 D_{14}$	$D_3 D_{16}$	$D_5 D_{11}$	$D_7 D_9$
[26]'	$D_2 D_{13}$	$D_4 D_{15}$	$D_6 D_{12}$	$D_8 D_{10}$
[34]	$D_2 D_6$	$D_3 D_7$	$D_9 D_{16}$	$D_{12} D_{13}$
[34]'	$D_1 D_5$	$D_4 D_8$	$D_{10} D_{15}$	$D_{11} D_{14}$
[35]	$D_2 D_{10}$	$D_3 D_{11}$	$D_5 D_{16}$	$D_8 D_{13}$
[35]'	$D_1 D_9$	$D_4 D_{12}$	$D_6 D_{15}$	$D_7 D_{14}$
[36]	$D_2 D_{14}$	$D_3 D_{15}$	$D_5 D_{12}$	$D_8 D_9$
[36]'	$D_1 D_{13}$	$D_4 D_{16}$	$D_6 D_{11}$	$D_7 D_{10}$

[45]	$D_5\ D_9$	$D_6\ D_{10}$	$D_7\ D_{11}$	$D_8\ D_{12}$
[45]′	$D_1\ D_{16}$	$D_2\ D_{15}$	$D_3\ D_{11}$	$D_4\ D_{13}$
[46]	$D_5\ D_{13}$	$D_6\ D_{14}$	$D_7\ D_{15}$	$D_8\ D_{16}$
[46]′	$D_1\ D_{12}$	$D_2\ D_{11}$	$D_3\ D_{10}$	$D_4\ D_9$
[56]	$D_9\ D_{13}$	$D_{10} D_{14}$	$D_{11} D_{15}$	$D_{12} D_{16}$
[56]′	$D_1\ D_8$	$D_2\ D_7$	$D_3\ D_6$	$D_4\ D_5$

Aus dieser Tabelle ist es leicht, die 80 Quadrupel von Doppeltangenten anzugeben, ebenso die 60 Gruppen von zwei Paar Doppeltangenten, deren acht Berührungspunkte auf einem Kegelschnitte liegen.

IV. Die adjungirten dreifach berührenden Kegelschnitte der Curve 4ter Ordnung mit einem Doppelpunkte.

28. Ausser den in II. betrachteten vierfach berührenden Kegelschnitten der Curve Φ, die nicht durch den Doppelpunkt gehen, existiren noch Systeme von Kegelschnitten, welche durch den Doppelpunkt d von Φ gehend, diese in drei Punkten berühren.

Ist χ ein solcher Kegelschnitt, der in a_1, a_2, a_3 die Φ berühren möge, und legt man durch die vier Punkte d, a_1, a_2, a_3 irgend einen Kegelschnitt K, so schneidet er Φ noch in drei Punkten b_1, b_2, b_3, in denen ein Kegelschnitt χ' die Φ berührt. Der Büschel von Kegelschnitten durch d, a_1, a_2, a_3 schneidet das ganze System von Tripeln aus, in denen ein Kegelschnitt χ die Φ berührt.

Legt man den Kegelschnitt K des obigen Büschels durch einen der Punkte t_i, so muss offenbar χ' zerfallen in die Tangente T_i des Punktes t_i, die durch d geht, und in eine zweite Gerade, die Doppeltangente von Φ ist.

Es treten mithin in einem System der dreifach berührenden Kegelschnitte stets sechs Doppeltangenten gepaart mit den sechs Tangenten aus dem Doppelpunkte als zerfallende Kegelschnitte auf.

Da umgekehrt jede Tangente aus dem Doppelpunkte in Verbindung mit einer Doppeltangente einen dreifach berührenden adjungirten Kegelschnitt darstellt, also zu einem System solcher Kegelschnitte gehört, in welchem noch die fünf übrigen Tangenten gepaart mit fünf Doppeltangenten auftreten, so ersieht man, dass es blos 16 Systeme adjungirter dreifach berührender Kegelschnitte gibt.

Diese 16 Systeme erhält man am einfachsten, wenn man eine der Tangenten, z. B. T_1 nach einander mit allen 16 Doppeltangenten verbindet.

29. Die Anordnung der 16 Doppeltangenten in diese 16 Systeme mit den ihnen zugehörenden Tangenten T_i erhält man aus den fünf ersten Systempaaren der Tabelle II, indem jedes Paar Doppeltangenten eines dieser Systeme mit dem Paar Tangenten aus d, welche das System charakterisiren, zwei zerfallende Kegelschnitte desselben dreifach berührenden Systems von adjungirten Kegelschnitten gibt. So liegt in dem System, welches durch $T_1 D_1$ bestimmt ist, auch $T_2 D_4$, da $D_1 D_4$ ein Paar aus dem System [12] darstellen, ebenso liegen noch $T_3 D_3$, $T_4 D_7$, $T_5 D_{11}$ und $T_6 D_{15}$ in demselben System dreifach berührender Kegelschnitte wie $T_1 D_1$. Man könnte auch irgend fünf Systempaare nehmen, die eine Ziffer gemeinschaftlich haben.

Man erhält hiedurch folgende Tabelle:

Tabelle III.

T_1	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9	D_{10}	D_{11}	D_{12}	D_{13}	D_{14}	D_{15}	D_{16}
T_2	D_4	D_3	D_2	D_1	D_8	D_7	D_6	D_5	D_{12}	D_{11}	D_{10}	D_9	D_{16}	D_{15}	D_{14}	D_{13}
T_3	D_3	D_4	D_1	D_2	D_7	D_8	D_5	D_6	D_{11}	D_{12}	D_9	D_{10}	D_{15}	D_{16}	D_{13}	D_{14}
T_4	D_7	D_8	D_5	D_6	D_3	D_4	D_1	D_2	D_{14}	D_{13}	D_{16}	D_{15}	D_{10}	D_9	D_{12}	D_{11}
T_5	D_{11}	D_{12}	D_9	D_{10}	D_{14}	D_{13}	D_{16}	D_{15}	D_3	D_4	D_1	D_2	D_6	D_5	D_8	D_7
T_6	D_{15}	D_{16}	D_{13}	D_{14}	D_{10}	D_9	D_{12}	D_{11}	D_6	D_5	D_8	D_7	D_3	D_4	D_1	D_2

Die sechs Tangenten T_i sind immer mit den sechs Doppeltangenten einer Columne in einem System von adjungirten dreifach berührenden Kegelschnitten enthalten, und zwar bildet jede Tangente mit der Doppeltangente derselben Zeile ein Paar.

30. Die canonische Gleichungsform der Curve 4[ter] Ordnung

$$\Phi_{12} \equiv \tau_1^2 T_2^2 + (\tau_1^2 + \tau_2^2 - \tau_3^2) T_1 T_2 + \tau_1^2 T_2^2 = 0$$

erlaubt auch die Gleichung des Systems der dreifach berührenden adjungirten Kegelschnitte in einfacher Weise aufzustellen, welches der Tangente T_1 und der Doppeltangente D_1 entspricht.

Aus der Identität

$$\Phi_{12} \equiv [\tau_1 T_2 - \tau_2 T_1 + \nu D_4 T_2]^2 + D_4 T_2 [D_1 T_1 - 2\nu(\tau_1 T_2 - \tau_2 T_1) - \nu^2 D_4 T_2]$$

wobei

$$D_1 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$$
$$D_4 = \tau_1 + \tau_2 - \tau_3$$

ist, ersieht man, dass die Kegelschnitte

$$\chi \equiv D_1 T_1 - 2\nu(\tau_1 T_2 - \tau_2 T_1) - \nu^2 D_4 T_2 = 0,$$

welche durch den Doppelpunkt von Φ gehen, für alle Werthe von ν die Curve Φ noch in drei Punkten berühren.

In dem System ist für $\nu = 0$, $\nu = \infty$ auch das Paar $D_1 T_1$, resp. $D_4 T_2$ enthalten.

Dieselbe Form Φ_{12} kann zur Aufstellung des Systems verwendet werden, welches $T_1 D_2$, $T_1 D_3$ und $T_1 D_4$ enthält. Man kann nämlich eine der obigen analoge Identität aufstellen, wobei nur statt $\tau_1 T_2 - \tau_2 T_1 + \nu D_4 T_2$ eine andere Function genommen werden muss, die sich aus den S. 10, Gl. (17) abgeleiteten Gleichungen für die Kegelschnitte K_{ik} ergibt.

Anmerkung: Die Curven 4[ter] Ordnung ohne Doppelpunkt haben 63 Systeme von vierfach berührenden Kegelschnitten und 28 Doppeltangenten. Ändert man die Constanten einer solchen Curve so ab, dass sie einen Doppelpunkt erhält, so übergeht ein System der Kegelschnitte in die doppelt gezählten Geraden durch den Doppelpunkt, 32 Systeme übergehen in die 16 Systeme adjungirter Kegelschnitte, die noch in drei Punkten berühren, und nur 30 Systeme eigentlich vierfach berührender Kegelschnitte bleiben als solche bestehen, die wir in II betrachtet haben. Von den Doppeltangenten bleiben nur 16 erhalten, die 12 übrigen übergehen in die sechs Tangenten vom Doppelpunkte an die Curve, die also jede zwei zusammengefallene Doppeltangenten vorstellt. Dies stimmt auch damit überein, dass ein solches Tangentenpaar aus dem Doppelpunkte stets in einem der 30 Systeme vierfach berührender Kegelschnitte doppelt als zerfallender Kegelschnitt zählt, wie in III, sub **23.** gezeigt wurde.

Zweite Abtheilung.

Besondere Curven 4[ter] Ordnung vom Geschlechte Zwei.

1. Wir haben in der ersten Abtheilung sub I gezeigt, dass sich die Gleichung einer allgemeinen Curve 4[ter] Ordnung mit einem Doppelpunkte auf die Form

$$\Phi \equiv (T_1^2 + T_2^2) T_{12}^2 + 2 T_1 T_2 H \tag{1}$$

bringen lässt, wobei

$$H \equiv a_{11} T_1^2 + a_{22} T_2^2 + a_{33} T_{12}^2 + 2a_{12} T_1 T_2 + 2a_{13} T_1 T_{12} + 2a_{23} T_2 T_{12} \tag{2}$$

ist. Durch Specialisirung der Constanten a_{ik} erhält man besondere Curven.

Wir wollen im Nachstehenden solche Curven betrachten, welche im Doppelpunkte einen oder zwei Wendepunkte besitzen, oder die statt des Doppelpunktes eine Spitze haben.

Wir bemerken hiezu Folgendes: Aus der Gleichung der Curve Φ

$$\Phi \equiv [T_1^2+T_2^2+2a_{33}T_1T_2]T_{12}^2+2T_1T_2[a_{11}T_1^2+a_{22}T_2^2+2a_{12}T_1T_2+2a_{13}T_1T_{12}+2a_{23}T_2T_{12}]=0 \quad (3)$$

folgt, dass die beiden Geraden, deren Gleichung

$$T_1^2+T_2^2+2a_{33}T_1T_2=0$$

ist, die Doppelpunktstangenten von Φ sind. Ist also $a_{33}=\pm 1$, so erhält Φ eine Spitze, deren Tangente $T_1 \pm T_2 = 0$ ist. Ist aber $a_{33}^2 \neq 1$, so werden die Doppelpunktstangenten nicht zusammenfallen, und jede schneidet Φ in dem Punkte, in welchem sie den Kegelschnitt

$$a_{11}T_1^2+a_{22}T_2^2+2a_{12}T_1T_2+2a_{13}T_1T_{12}+2a_{23}T_2T_{12}=0$$

noch trifft. Soll also eine der Doppelpunktstangenten Wendetangente von Φ werden, so muss der letzte Schnittpunkt auch in den Doppelpunkt d fallen, d. h. die Gerade

$$a_{13}T_1+a_{23}T_2=0$$

muss eine der Geraden

$$T_1^2+T_2^2+2a_{33}T_1T_2=0$$

werden, oder es ist

$$a_{13}^2+a_{23}^2-2a_{33}a_{13}a_{23}=0. \quad (4)$$

Ist nun $a_{13} \neq 0$, $a_{23} \neq 0$, so wird unter der Bedingung (4)

$$a_{13}a_{23}(T_1^2+T_2^2+2a_{33}T_1T_2) \equiv (a_{13}T_1+a_{23}T_2)(a_{23}T_1+a_{13}T_2),$$

und daher

$$a_{13}a_{23}\Phi \equiv$$
$$(a_{13}T_1+a_{23}T_2)(a_{23}T_1+a_{13}T_2)T_{12}^2+2T_1T_2[a_{11}T_1^2+a_{22}T_2^2+2a_{12}T_1T_2+2(a_{13}T_1+a_{23}T_2)T_{12}] \quad (5)$$

woraus ersichtlich, dass die Gerade

$$a_{13}T_1+a_{23}T_2=0 \quad (6)$$

die Curve Φ im Doppelpunkte in vier zusammenfallenden Punkten schneidet, also daselbst Wendetangente ist.

Ist aber $a_{13}=0$, so muss auch $a_{23}=0$ sein, wenn im Doppelpunkt ein Wendepunkt auftreten soll (zu Folge (4)), dann treten aber auf beiden Zweigen Wendepunkte auf. Denn dann wird die Gleichung der Curve

$$\Phi \equiv (T_1^2+T_2^2+2a_{33}T_1T_2)T_{12}^2+2T_1T_2[a_{11}T_1^2+a_{22}T_2^2+2a_{12}T_1T_2]=0, \quad (7)$$

woraus man ersieht, dass jede der beiden Geraden

$$T_1^2+T_2^2+2a_{33}T_1T_2=0$$

die Curve Φ nur in dem Doppelpunkte d trifft, nämlich in den Schnittpunkten von $T_1=0$, $T_2=0$, und im Scheitel des Geradenpaares

$$a_{11}T_1^2+a_{22}T_2^2+2a_{12}T_1T_2=0.$$

Ist schliesslich $a_{33}=-1$, so wird

$$\Phi \equiv (T_1-T_2)^2T_{12}^2+2T_1T_2[a_{11}T_1^2+a_{22}T_2^2+2a_{12}T_1T_2+2a_{13}T_1T_{12}+2a_{23}T_2T_{12}]=0 \quad (8)$$

die Gleichung der Curve, aus welcher ersichtlich, dass die Spitzentangente $T_1-T_2=0$ die Φ nur in dem Punkte trifft, in welchem diese Gerade den Kegelschnitt

$$a_{11}T_1^2+a_{22}T_2^2+2a_{12}T_1T_2+2a_{13}T_1T_{12}+2a_{23}T_2T_{12}=0$$

schneidet. Dieser Kegelschnitt geht durch die Spitze von Φ und berührt Φ noch in drei Punkten. Sollte nebst $a_{33}=-1$ auch noch (4) gelten, was $a_{13}=-a_{23}$ geben würde, so hätte die Curve Φ einen Selbstberührungspunkt im Punkte $T_1=0$ $T_2=0$ mit der Tangente $T_1-T_2=0$ und wäre vom Geschlechte 1.

Wir wollen nun die Systeme vierfach berührender Kegelschnitte und Doppeltangenten dieser besonderen Curven untersuchen.

I. Die Curve 4ter Ordnung, welche im Doppelpunkte einen Wendepunkt hat.

2. Hat die Curve 4ter Ordnung im Doppelpunkte d einen Wendepunkt, so gehen von d blos fünf Tangenten, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 an dieselbe, welche in t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 die Curve berühren, wobei die Punkte t_i ausserhalb d fallen. Als sechste Tangente tritt die Wendepunktstangente X des einen Zweiges hinzu. Die $\frac{1}{2}.5.4=$ $=10$ Systeme von vierfach berührenden Kegelschnitten, welche den Combinationen T_i, T_k entsprechen, bleiben offenbar erhalten, denn die Gleichung der Curve

$$\Phi\equiv(T_1^2+T_2^2)\,T_{12}^2+2\,T_1\,T_2\,[a_{11}\,T_1^2+a_{22}\,T_2^2+a_{33}\,T_3^2+2\,a_{12}\,T_1\,T_2+2\,a_{13}\,T_1\,T_{12}+2\,a_{23}\,T_2\,T_{12}] \tag{9}$$

mit der Bedingung

$$a_{13}^2+a_{23}^2-2\,a_{33}\,a_{13}\,a_{23}=0$$

kann genau so behandelt werden, wie in II sub 12., und man erhält so 20 Systeme vierfach berührender Kegelschnitte, die paarweise conjungirt sind, und die Quadrupel derselben werden aus d durch Kegelschnittsbüschel projicirt, welche in d die Tangenten $\mathfrak{T}_{ik}$, resp. $\mathfrak{T}'_{ik}$ haben und durch t_i, t_k hindurchgehen.

Den fünf Combinationen der T_i mit X entsprechen dann noch fünf Paare besonderer Systeme vierfach berührender Kegelschnitte. Die Kegelschnitte, welche die Quadrupel aus d projiciren und durch t_i gehen, osculiren einander in d und haben X zur gemeinschaftlichen Tangente.

Denn setzen wir $\frac{a_{23}}{a_{13}}=\delta$, so übergeht die Identität (5) in

$$\Phi\equiv(T_1+\delta\,T_2)\Big(T_1+\frac{1}{\delta}\;T_2\Big)+\frac{2}{a_{13}a_{23}}\;T_1\,T_2[a_{11}\,T_1^2+a_{22}\,T_2^2+2\,a_{12}\,T_1\,T_2+2\,a_{13}(T_1+\delta\,T_2)\,T_{12}] \tag{10}$$

setzt man nun

$$T_1+\delta\,T_2=X,$$

woraus

$$T_1=X-\delta\,T_2$$

wird, und führt statt T_1, T_2 in (10) die Geraden X, T_2 ein, wobei $X=0$ die Wendepunktstangente ist, so wird nach (10) sich für Φ die Form

$$\Phi\equiv X^2\,T_{12}^2+\alpha\,T_2^4+X\,T_2\,H' \tag{11}$$

ergeben, wobei $\alpha=\frac{a_{12}^2-a_{23}^2}{a_{13}\,a_{23}}$ von Null verschieden sein muss und

$$H'\equiv\alpha_{11}\,X^2+\alpha_{22}\,T_2^2+\alpha_{33}\,T_{12}^2+2\,\alpha_{12}\,X\,T_2+2\,\alpha_{13}\,X\,T_{12}+2\,\alpha_{23}\,T_2\,T_{12}$$

ist.

Nun folgt aus der Identität

$$\Phi\equiv[\mu X\,T_2+(X\,T_{12}\pm\sqrt{\alpha}\;T_2^2)]^2+X\,T_2[H'\mp2\sqrt{\alpha}\;T_2\,T_{12}-2\mu(X\,T_{12}\pm\sqrt{\alpha}\;T_2^2)-\mu^2X\,T_2], \tag{12}$$

dass der Kegelschnitt

$$K\equiv\mu X\,T_2+(X\,T_{12}+\sqrt{\alpha}\,T_2^2)=0 \tag{13}$$

die Curve Φ ausser in t_2 und d noch in vier Punkten trifft, in denen der Kegelschnitt

$$\mathfrak{K}\equiv H'-2\sqrt{\alpha}\,T_2\,T_{12}-2\,\mu(X\,T_{12}+\sqrt{\alpha}\;T_2^2)-\mu^2\,X\,T_2=0 \tag{14}$$

die Φ berührt, während der Kegelschnitt

$$K' \equiv \mu X T_2 + (X T_{12} - \sqrt{\alpha}\, T_2^2) = 0 \tag{13a}$$

die Φ in den vier Punkten schneidet, in welchen sie vom Kegelschnitte

$$\mathfrak{K}' \equiv H' + 2\sqrt{\alpha}\, T_2 T_{12} - 2\mu(\chi T_{12} - \sqrt{\alpha} T_2^2) - \mu^2 X T_2 = 0 \tag{14a}$$

berührt wird.

Die Kegelschnitte (14) beschreiben bei variablem μ das System, welches als speciellen Kegelschnitt für $\mu = \infty$ das Geradenpaar X, T_2 aufweist. Die Kegelschnitte (14a) beschreiben das hiezu conjungirte System.

Die Quadrupel des Systems (14) werden, wie (13) zeigt, durch einen Kegelschnittsbüschel aus d projicirt, dessen Elemente durch den Punkt t_2 gehen und sich in d osculiren. Die gemeinschaftliche Tangente ist X. Die Kegelschnitte (13) osculiren den Kegelschnitt

$$X T_{12} + \sqrt{\alpha} T_2^2 = 0,$$

welches ein Kegelschnitt des Büschels von Kegelschnitten ist, die in d und t_2 die Geraden X und T_{12} berühren. Die Kegelschnitte (13a) osculiren den Kegelschnitt

$$X T_{12} - \sqrt{\alpha}\, T_2^2 = 0$$

desselben Büschels.

II. Die Curve 4ter Ordnung, welche im Doppelpunkt zwei Wendepunkte hat.

3. Haben beide Zweige der Curve 4ter Ordnung im Doppelpunkte d Wendetangenten, so gehen von d an Φ nur mehr vier Tangenten T_1, T_2, T_3, T_4, die ausserhalb d in den Punkten t_1, t_2, t_3, t_4 die Φ berühren.

Diesen vier Tangenten entsprechen $\frac{1}{2} . 4 . 3 = 6$ Systempaare von vierfach berührenden Kegelschnitten, wie sie in II der ersten Abtheilung betrachtet wurden, die Kegelschnitte, welche aus d die Quadrupel projiciren, berühren hiebei die Geraden $\mathfrak{T}_{ik}$ oder $\mathfrak{T}'_{ik}$, und gehen durch t_i und t_k.

Hiezu treten noch $2 . 4$ Systempaare von der Art, wie sie eben in I betrachtet wurden, die durch Combination der vier T_i mit einer der Wendepunktstangenten X_1 oder X_2 erhalten werden, und deren Quadrupel aus d durch Kegelschnitte projicirt werden, die durch t_i gehend, einander in d osculiren, indem sie eine der Wendepunktstangenten berühren.

Zu diesen Systemen tritt dann noch ein besonders ausgezeichnetes Systempaar hinzu, das wir näher betrachten wollen, welches der Combination der beiden Doppelpunktstangenten X_1, X_2 entspricht.

Wir haben gesehen, dass in diesem Falle die Gleichung der Curve 4ter Ordnung die Form

$$\Phi \equiv (T_1^2 + T_2^2 + 2a_{33} T_1 T_2) T_{12}^2 + 2 T_1 T_2 [a_{11} T_1^2 + a_{22} T_2^2 + 2 a_{12} T_1 T_2] = 0 \tag{15}$$

annimmt.

Wir setzen

$$T_1^2 + T_2^2 + 2a_{33} T_1 T_2 \equiv X_1 X_2,$$

so dass $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ die beiden Wendepunktstangenten sind, und führen statt T_1, T_2 die X_1, X_2 ein.

Wir erhalten dann für Φ die Gleichungsform:

$$\Phi_0 \equiv X_1 X_2 T_{12}^2 + [\alpha_0 X_1^4 + \alpha_1 X_1^3 X_2 + \alpha_2 X_1^2 X_2^2 + \alpha_3 X_1 X_2^3 + \alpha_4 X_2^4] = 0, \tag{16}$$

indem das zweite Polynom in (15) die Grösse T_{12} nicht enthält.

Aus (16) oder auch (15) ersieht man, dass die Punkte t_1, t_2, t_3, t_4 alle auf derselben Geraden T_{12} liegen.

Wir bezeichnen diese Gerade daher besser mit X_3 und erhalten

$$\Phi_0 \equiv X_1 X_2 X_3^2 + \alpha_0 X_1^4 + \alpha_1 X_1^3 X_2 + \alpha_2 X_1^2 X_2^2 + \alpha_3 X_1 X_2^3 + \alpha_4 X_2^4 = 0 \tag{17}$$

als Gleichung der Curve 4ter Ordnung, in deren Doppelpunkt zwei Wendepunkte fallen.

Aus der Identität

$$\begin{aligned}\Phi_0 \equiv [\sqrt{\alpha_0} X_1^2 \pm \sqrt{\alpha_4} X_2^2 + \mu X_1 X_2]^2 + X_1 X_2 [X_3^2 + \alpha_1 X_1^2 + \alpha_2 X_1 X_2 \\ + \alpha_3 X_2^2 \mp 2\sqrt{\alpha_0 \alpha_4}\, X_1 X_2 - 2\mu(\sqrt{\alpha_0} X_1^2 \pm \sqrt{\alpha_4} X_2^2) - \mu^2 X_1 X_2]\end{aligned} \tag{18}$$

deren Richtigkeit sich durch die Reduction leicht ergibt, folgt, dass das Geradenpaar

$$K \equiv \sqrt{\alpha_0} X_1^2 + \sqrt{\alpha_4} X_2^2 + \mu X_1 X_2 \tag{19}$$

die Curve Φ_0 in zwei Punktepaaren $a\alpha$, $b\beta$ der auf Φ_0 existirenden $g_2^{(1)}$ trifft, in welchen Φ_0 von dem Kegelschnitte

$$\mathfrak{K} \equiv X_3^2 + \alpha_1 X_1^2 + \alpha_3 X_2^2 + \alpha_2 X_1 X_2 - 2\sqrt{\alpha_0 \alpha_4}\, X_1 X_2 - 2\mu(\sqrt{\alpha_0} X_1^2 + \sqrt{\alpha_4} X_2^2) - \mu^2 X_1 X_2 = 0 \tag{20}$$

berührt wird.

Ebenso schneidet das Geradenpaar

$$K \equiv \sqrt{\alpha_0} X_1^2 - \sqrt{\alpha_4} X_2^2 + \mu X_1 X_2 \tag{19a}$$

die Φ_0 in den zwei Punktepaaren $a'\alpha'$, $b'\beta'$, in welchen der Kegelschnitt

$$\mathfrak{K}' \equiv X_3^2 + \alpha_1 X_1^2 + \alpha_3 X_2^2 + \alpha_2 X_1 X_2 + 2\sqrt{\alpha_0 \alpha_4}\, X_1 X_2 - 2\mu(\sqrt{\alpha_0} X_1^2 - \sqrt{\alpha_4} X_2^2) - \mu^2 X_1 X_2 = 0 \tag{20a}$$

die Φ_0 berührt. Man erhält auch nicht mehr als zwei solcher Systeme. Das Einführen von $-\sqrt{\alpha_0}$ an Stelle von $\sqrt{\alpha_0}$ wird durch Änderung des Vorzeichens von μ compensirt.

In beiden Systemen vierfach berührender Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ tritt für $\mu = \infty$ das Geradenpaar X_1, X_2 auf.

Wir haben daher: Hat die Curve 4ter Ordnung Φ im Doppelpunkte auf jedem Zweige einen Wendepunkt, so treten zwei einander conjungirte ausgezeichnete Systeme von Quadrupeln von Punkten auf, in denen Kegelschnitte die Φ vierfach berühren. Die vier Punkte eines Quadrupels bestehen aus zwei Paaren der $g_2^{(1)}$ von Φ und werden aus d durch je eine quadratische Strahleninvolution projicirt. Ein Paar beider Strahleninvolutionen sind die Wendetangenten X_1, X_2 des Doppelpunktes, die auch einen Kegelschnitt beider Systeme vorstellen.

Dass umgekehrt das Auftreten eines solchen ausgezeichneten Systems von Quadrupeln von Punkten hinreicht, dass Φ in dem Doppelpunkt Wendepunkte besitzt, wurde bereits in der ersten Abtheilung II. sub **14.** S. 131 gezeigt.

4. Die Gleichungen (20) resp. (20a) lassen erkennen, dass die Kegelschnitte dieser ausgezeichneten Systeme die Gerade X_3 zur Polare von d besitzen. Dies folgt übrigens auch daraus, dass die Paare der $g_2^{(1)}$ auf den Strahlen von d harmonisch getrennt sind durch d_1 und X_3. Daher schneiden einander je zwei Kegelschnitte der conjungirten Systeme in vier Punkten, die paarweise auf Strahlen durch d liegen.

In jedem der Systeme liegen vier Paar zerfallende Kegelschnitte, welche acht Doppeltangenten von Φ sind. Der Schnittpunkt jedes Paares muss auf X_3 liegen und beide Doppeltangenten werden durch X und d von einander harmonisch getrennt.

Hieraus folgt, dass jedes Paar Doppeltangenten von den sieben Paar anderen Doppeltangenten in $4.7 = 28$ Punkten getroffen wird, die paarweise auf 14 Strahlen durch d liegen. Dies gibt $\frac{1}{2}.8.14 = 56$ Strahlen durch d, auf denen 112 Schnittpunkte der 16 Doppeltangenten liegen. Die acht noch fehlenden liegen auf X_3.

III. Curven 4ter Ordnung mit einer Spitze.

5. Die Gleichung der Curve 4ter Ordnung Φ_1 mit einer Spitze kann stets auf die Form

$$\Phi_1 \equiv (T_1 - T_2)^2 T_{12}^2 + 2\, T_1\, T_2 [a_{11}\, T_1^2 + a_{22}\, T_2^2 + 2\, a_{12}\, T_1\, T_2 + 2\, a_{13}\, T_1\, T_{12} + 2\, a_{23}\, T_2 T_{12}] \tag{21}$$

gebracht werden, wobei T_1, T_2 zwei der Tangenten aus der Spitze s an Φ_1 sind, und $T_1 - T_2 = 0$ die Gleichung der Spitzentangente $\mathfrak{T}$ ist.

Von der Spitze s gehen an Φ_1 sechs Tangenten T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, deren Berührungspunkte t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6 auf Φ_1, von einer Curve 3ter Ordnung Γ ausgeschnitten werden, die in s eine Spitze hat, und dieselbe Spitzentangente $\mathfrak{T}$ besitzt, wie Φ_1. Γ ist die erste Polare von s für Φ_1. Man kann daher Φ_1 auf 15 verschiedene Arten auf die Form (21) bringen.

Die Systeme vierfach berührender Kegelschnitte ergeben sich aus der Identität

$$\Phi_1 \equiv [2\,\mu\, T_1\, T_2 + (T_1 \pm T_2)\, T_{12}]^2 + 2\, T_1\, T_2 [H_1 \mp T_{12}^2 - 2\,\mu (T_1 \pm T_2)\, T_{12} - 2\,\mu^2\, T_1\, T_2] \tag{22}$$

wobei

$$H_1 = a_{11}\, T_1^2 + a_{22}\, T_2^2 - T_{12}^2 + 2 a_{12}\, T_1\, T_2 + 2\, a_{13}\, T_1\, T_{12} + 2\, a_{23}\, T_2\, T_{12} \tag{23}$$

ist.

Das System [12] besteht aus den Kegelschnitten

$$\mathfrak{K} \equiv a_{11}\, T_1^2 + a_{22}\, T_2^2 - 2\, T_{12}^2 + 2\, a_{12}\, T_1\, T_2 + 2\, a_{13}\, T_1\, T_{12} + 2\, a_{23}\, T_2\, T_{12} - 2\,\mu (T_1 + T_2)\, T_{12} - 2\,\mu^2\, T_1\, T_2 = 0, \tag{24}$$

die in den vier Punkten berühren, in welchen die Kegelschnitte des Büschels

$$2\,\mu\, T_1\, T_2 + (T_1 + T_2)\, T_{12} = 0 \tag{25}$$

die Φ_1 noch schneiden, ausser den allen gemeinschaftlichen Punkten s, t_1, t_2. Die Kegelschnitte dieses Büschels berühren in s die Gerade $\mathfrak{T}_{12}$, welche die Spitzentangente $\mathfrak{T}$ von T_1, T_2 harmonisch trennt. Von den vier Punkten des Quadrupels liegt keiner in s.

Die Kegelschnitte des Systems [12]′, welches zu [12] conjungirt ist, haben die Gleichung

$$\mathfrak{K}' \equiv a_{11}\, T_1^2 + a_{22}\, T_2^2 + 2\, a_{12}\, T_1\, T_2 + 2\, a_{13}\, T_1\, T_{12} + 2\, a_{23}\, T_2\, T_{22} - 2\,\mu (T_1 - T_2)\, T_{11} - 2\,\mu^2\, T_1\, T_2 = 0, \tag{26}$$

aus welcher ersichtlich, dass sie alle durch s gehen, daher Φ nur noch in drei Punkten berühren.

Der diese Tripel ausschneidende Büschel von Kegelschnitten, dessen Gleichung

$$2\,\mu\, T_1\, T_2 + (T_1 - T_2)\, T_{12} = 0 \tag{27}$$

ist, hat in s die Spitzentangente $\mathfrak{T}$ zur gemeinschaftlichen Tangente und t_1, t_2 sind seine weiteren Basispunkte. Das System [12]′ enthält also nur eigentlich dreifach berührende Kegelschnitte.

Da es nun 15 verschiedene Formen (21) für die Curve 4ter Ordnung mit einer Spitze gibt, so folgt:

Die Curve 4ter Ordnung mit einer Spitze hat nur 15 Systeme eigentlich vierfach berührender Kegelschnitte. In jedem dieser Systeme $[ik]$ tritt das Tangentenpaar T_i, T_k aus der Spitze als ein Kegelschnitt auf. (Wir werden gleich sehen, dass es dreifach zählt.) Die Kegelschnitte, welche die Quadrupel des Systems $[ik]$ aus s projiciren, gehen durch t_i, t_k und berühren in s die Gerade $\mathfrak{T}_{ik}$, welche die Spitzentangente $\mathfrak{T}$ von T_i, T_k harmonisch trennt. Die zu diesen 15 Systemen conjungirten Systeme $[ik]'$ enthalten Kegelschnitte, die durch s gehen und nur in drei weiteren Punkten die Φ_1 berühren. Der Kegelschnittsbüschel, welcher diese Tripel ausschneidet, geht durch t_i, t_k und berührt in s die Spitzentangente. Man zeigt, wie in der ersten Abtheilung in II sub **14.** leicht, dass weiter keine Systeme berührender Kegelschnitte auf Φ_1 auftreten können.

6. In jedem Systeme vierfach oder dreifach berührender Kegelschnitte treten Doppeltangenten auf.

Betrachten wir zuerst das System [12]′, dessen Kegelschnitte durch s gehen und dessen Tripel durch den Büschel (27) ausgeschnitten werden, so treten in dem System vier Doppeltangenten gepaart mit den vier

Tangenten T_3, T_4, T_5, T_6 auf. Denn legt man den Kegelschnitt des Büschels (27) durch einen der Punkte t_i ($i = 3, 4, 5, 6$), so muss der zugehörige Kegelschnitt des Systems (26) zerfallen in T_i, welche Gerade durch s geht, und eine zweite Gerade, welche Φ_1 in zwei Punkten berührt und nicht durch s geht, also eine Doppeltangente von Φ_1 ist.

In dem System [12], dessen Gleichung (24) ist, treten nur drei in Geradenpaare zerfallende Kegelschnitte auf. Denn die Discriminante des Kegelschnittes (24) liefert die Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}-\mu^2 & a_{13}-\mu \\ a_{12}-\mu^2 & a_{22} & a_{23}-\mu \\ a_{13}-\mu & a_{23}-\mu & -2 \end{vmatrix} = 0, \tag{28}$$

welche in μ blos vom 3ten Grade wird, indem der Coëfficient von μ^4 verschwindet.

Die Discriminante eines Kegelschnittes, dessen Coëfficienten von μ im zweiten Grade abhängen, ist i. A. vom 6ten Grade und man sieht also, dass für (28) $\mu = \infty$ eine dreifache Wurzel wird, d. h. das Geradenpaar T_1, T_2 zählt in [12] als drei in Geradenpaare zerfallende Kegelschnitte.

Die drei endlichen Wurzelwerthe von (28) liefern drei Geradenpaare des Systems [12] oder sechs Doppeltangenten von Φ_1, die von den obigen vier verschieden sein müssen.

Die Curve Φ_1 kann aber ausser diesen zehn Doppeltangenten keine mehr besitzen. Denn sei D eine Doppeltangente von Φ_1, welche in δ, δ' die Φ_1 berührt, und K derjenige Kegelschnitt, welcher durch δ, δ', t_1, t_2 und s bestimmt ist. Dann wird K entweder die Spitzentangente $\mathfrak{T}$ berühren oder nicht berühren.

Berührt K die Spitzentangente $\mathfrak{T}$, so wird er Φ_1 nur mehr in einem Punkte schneiden und es wird in dem Büschel Curven 4ter Ordnung

$$\Phi_1 - \lambda K^2 = 0$$

die Curve, welche mit T_1 einen willkürlichen Punkt gemeinschaftlich hat, in die Geraden T_1, T_2 und D zerfallen müssen, überdies in die Tangente des Punktes, in welchem K die Φ_1 noch schneidet. Diese Tangente muss aber durch s gehen, da D nicht durch s geht und $\mathfrak{T}$ von allen Curven des Büschels in s in drei zusammenfallenden Punkten getroffen wird. Dann ist aber D mit der eben erwähnten Tangente aus s gepaart in dem System $[12]'$ enthalten, also eine der vier oben gefundenen Doppeltangenten.

Berührt aber K die Spitzentangente $\mathfrak{T}$ nicht, so schneidet er Φ_1 noch in den Punkten δ_1, δ_1' und die Curve des Büschels 4ter Ordnung

$$\Phi_1 - \lambda K^2 = 0,$$

welche mit T_1 einen Punkt gemeinschaftlich hat, muss zerfallen in T_1, T_2, D und die Gerade $D' = \overline{\delta_1 \delta_1'}$, welche Φ_1 in $\delta_1 \delta_1'$ berühren muss. Dann ist aber D' mit D zusammen ein Kegelschnitt des Systems [12], also DD' ein Doppeltangentenpaar, das in [12] auftritt.

Die zehn Doppeltangenten der Curve 4ter Ordnung mit einer Spitze ordnen sich daher in die 15 Systeme vierfach berührender Kegelschnitte derart ein, dass in jedem System drei Paare vorkommen. Die vier übrigen Doppeltangenten treten in dem conjungirten System dreifach berührender Kegelschnitte, gepaart mit vier Tangenten aus dem Doppelpunkte auf.

7. Die Anordnung der Doppeltangenten in die Systeme $[ik]'$ dreifach berührender Kegelschnitte ergibt sich am einfachsten aus folgendem Satze:

Legt man durch drei der Punkte t_i einen Kegelschnitt, welcher die Spitzentangente berührt, so schneidet er Φ_1 noch in zwei Punkten, die Berührungspunkte einer Doppeltangente sind. Man erhält dieselben Punkte, wenn man den Kegelschnitt durch die drei übrigen Punkte t_h legt, so dass er die Spitzentangente berührt.

Was den ersten Theil des Satzes anbelangt, so folgt er aus der Betrachtung in 6., die uns die vier Doppeltangenten in den Systemen dreifach berührender Kegelschnitte lieferte. Der zweite Theil der obigen Behauptung ergibt sich folgendermassen.

Sei K der Kegelschnitt, welcher durch t_1, t_2, t_3 geht und die Spitzentangente $\mathfrak{T}$ berührt, und K' derjenige, welcher $\mathfrak{T}$ berührt und durch t_4, t_5, t_6 geht, dann muss eine Identität bestehen.

$$\Phi_1 - \lambda K K' \equiv D . \Gamma,$$

wo λ eine Constante ist, und Γ, die schon früher erwähnte erste Polare des Punktes s für Φ_1, die durch t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6 geht und $\mathfrak{T}$ zur Spitzentangente hat. Denn eine Curve des Büschels $\Phi_1 - \lambda KK' = 0$, welche mit Γ noch einen Punkt gemeinschaftlich hat, muss $\Gamma = 0$ als Theil enthalten. Es ist mithin $D = 0$ eine Gerade, welche durch die Schnittpunkte von $K . K' = 0$ mit $\Phi_1 = 0$ geht, die nicht auf Γ liegen. Ist mithin D eine Doppeltangente, so schneiden einander K und K' auf Φ_1 in den Berührungspunkten derselben.

Wir haben nun $\frac{1}{6} . 6 . 5 . 4 = 20$ Combinationen zu dreien der sechs Tangenten T_i, die sich in 10 Paare so theilen, dass die zwei Gruppen eines jeden Paares alle sechs Tangenten T_i aufweisen.

Die zehn Kegelschnittspaare, welche durch die entsprechenden Punkte t_i gehen und die Spitzentangente $\mathfrak{T}$ berühren, schneiden einander noch auf Φ_1 in den Berührungspunkten der zehn Doppeltangenten.

Wir wollen diesen Ternen von t_i die Doppeltangenten in nachfolgender Art zuordnen: Es soll

der	Terne	$[t_1\, t_2\, t_3]$	und	$[t_4\, t_5\, t_6]$	die	Doppeltangente	D_1
„	„	$[t_1\, t_2\, t_4]$	„	$[t_3\, t_5\, t_6]$	„	„	D_2
„	„	$[t_1\, t_2\, t_5]$	„	$[t_3\, t_4\, t_6]$	„	„	D_3
„	„	$[t_1\, t_2\, t_6]$	„	$[t_3\, t_4\, t_5]$	„	„	D_4
„	„	$[t_1\, t_3\, t_4]$	„	$[t_2\, t_5\, t_6]$	„	„	D_5
„	„	$[t_1\, t_3\, t_5]$	„	$[t_2\, t_4\, t_6]$	„	„	D_6
„	„	$[t_1\, t_3\, t_6]$	„	$[t_2\, t_4\, t_5]$	„	„	D_7
„	„	$[t_1\, t_4\, t_5]$	„	$[t_2\, t_3\, t_6]$	„	„	D_8
„	„	$[t_1\, t_4\, t_6]$	„	$[t_2\, t_3\, t_5]$	„	„	D_9
„	„	$[t_1\, t_5\, t_6]$	„	$[t_2\, t_3\, t_4]$	„	„	D_{10}

zugeordnet sein.

8. Aus dieser Festsetzung ergibt sich auch in einfacher Weise die Anordnung der Doppeltangenten in die 15 Systeme dreifach berührender Kegelschnitte, sowie auch in die 15 Systeme vierfach berührender Kegelschnitte.

Da die Berührungspunkte von D_1 mit t_1, t_2, t_3 auf einem Kegelschnitte liegen, der $\mathfrak{T}$ in s berührt, so ist D_1 mit T_3 gepaart im System $[12]'$ mit T_2, im System $[13]'$ und mit T_1 im System $[23]'$. Durch diese Eintheilung erhält man folgende

Tabelle IV.

	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{34}$	$\overline{35}$	$\overline{36}$	$\overline{45}$	$\overline{46}$	$\overline{56}$
T_1	.	.	.	.	.	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9	D_{10}
T_2	.	D_1	D_2	D_3	D_4	.	.	.	.	D_{10}	D_9	D_8	D_7	D_6	D_5
T_3	D_1	.	D_5	D_6	D_7	.	D_{10}	D_9	D_8	.	.	.	D_4	D_3	D_2
T_4	D_2	D_5	.	D_8	D_9	D_{10}	.	D_7	D_6	.	D_4	D_3	.	.	D_1
T_5	D_3	D_6	D_8	.	D_{10}	D_9	D_7	.	D_5	D_4	.	D_2	.	D_1	.
T_6	D_4	D_7	D_9	D_{10}	.	D_8	D_6	D_5	.	D_3	D_2	.	D_1	.	.

In derselben sind die T_i mit D_k derselben Zeile in dem System enthalten, dessen charakteristische Zahlen über D_k stehen. Also ist z. B. T_4 mit D_6 in $[26]'$ enthalten als ein dreifach berührender Kegelschnitt.

In jeder Columne, die die Bezeichnung $\overline{ik}$ führt, treten vier Doppeltangenten auf, die sechs übrigen bilden drei in $[ik]$ auftretende zerfallende Kegelschnitte, und es handelt sich darum, die Anordnung der sechs Doppeltangenten in die drei Paare anzugeben.

Hiezu benützen wir folgenden leicht zu beweisenden Satz: Die sechs Punkte, welche zwei Tripel bilden, in denen zwei Kegelschnitte desselben Systems $[ik]'$ die Φ_1 berühren, liegen auf einem Kegelschnitte, der durch s geht.

Nun liegt z. B. T_1 mit D_5 und T_2 mit D_{10} in dem System $[34]'$, also geht durch die Berührungspunkte von D_5 und D_{10} sowie s, t_1, t_2 ein Kegelschnitt und hieraus folgt, dass D_5, D_{10} einen Kegelschnitt im Systeme [12] bilden.

Man ersieht nun leicht folgende Regel: Mit T_i und T_k liegen in derselben Zeile der Tabelle IV sechs Doppeltangenten, die untereinander in einer Columne stehen. Die untereinander stehenden bilden stets ein Paar im System $[ik]$. Die sechs unter einander stehenden Tangenten liefern immer nur dieselben drei Paare, z. B. liefern die Zeilen von T_1 und T_2 die drei Paare $D_5 D_{10}$, $D_6 D_9$, $D_7 D_8$, welche im System [12] auftreten.

Auf diese Art erhält man aus der Tabelle IV die nachstehende

Tabelle V.

[12]	$D_5 D_{10}$	$D_6 D_9$	$D_7 D_8$
[13]	$D_2 D_{10}$	$D_3 D_9$	$D_4 D_8$
[14]	$D_1 D_{10}$	$D_3 D_7$	$D_4 D_6$
[15]	$D_1 D_9$	$D_2 D_7$	$D_4 D_5$
[16]	$D_1 D_8$	$D_2 D_6$	$D_3 D_5$
[23]	$D_2 D_5$	$D_3 D_6$	$D_4 D_7$
[24]	$D_1 D_5$	$D_3 D_8$	$D_4 D_9$
[25]	$D_1 D_6$	$D_2 D_8$	$D_4 D_{10}$
[26]	$D_1 D_7$	$D_2 D_9$	$D_3 D_{10}$
[34]	$D_1 D_2$	$D_6 D_8$	$D_7 D_9$
[35]	$D_1 D_3$	$D_5 D_8$	$D_7 D_{10}$
[36]	$D_1 D_4$	$D_5 D_9$	$D_6 D_{10}$
[45]	$D_2 D_3$	$D_5 D_6$	$D_9 D_{10}$
[46]	$D_2 D_4$	$D_5 D_7$	$D_8 D_{10}$
[56]	$D_3 D_4$	$D_6 D_7$	$D_8 D_9$

In derselben stehen die drei Paare Doppeltangenten in derselben Zeile, wie die charakteristischen Zahlen des Systems vierfach berührender Kegelschnitte, in welchen dieselben drei Kegelschnitte darstellen.

9. Jede Doppeltangente ist mit den neun übrigen in neun Systemen $[ik]$ gepaart enthalten, mit den sechs Tangenten T_n tritt sie dann in den sechs Systemen $[hl]'$ gepaart auf, die zu den sechs übrigen der 15 Systeme vierfach berührender Kegelschnitte conjungirt sind.

Dies folgt entweder aus den Tabellen IV und V oder durch directe Betrachtungen an der Curve Φ_1.

Durch die acht Berührungspunkte je zweier Paare von Doppeltangenten, die in demselben Systeme $[ik]$ liegen, geht ein Kegelschnitt. Man erhält daher für jedes System drei solche Kegelschnitte und da die vier Doppeltangenten dann in drei verschiedenen Systemen als zwei Paare auftreten, so gibt es nur 15 Kegelschnitte, welche durch acht Berührungspunkte von vier Doppeltangenten gehen.

Quadrupel von Doppeltangenten, wie sie in der ersten Abtheilung in III sub **24.** betrachtet wurden, kommen bei der Curve 4ter Ordnung mit einer Spitze nicht vor. Es treten drei Doppeltangenten mit einer Tangente T_i aus der Spitze zusammen und bilden dann ein solches Quadrupel. Denn nimmt man zwei Doppeltangenten $D_{i_1} D_{i_2}$, die ein Paar in $[ik]$ bilden, zusammen mit einem Paar aus $[ik]'$, welches aus einer dritten Doppeltangente D_{i_3} und der Tangente T_{i_4} besteht, so bilden die sechs Berührungspunkte der drei Doppeltangenten der Punkt t_{i_4} und die Spitze s die acht Basispunkte eines Büschels von Curven 3ter Ordnung φ, die in s die Spitzentangente $\mathfrak{T}$ zur gemeinschaftlichen Tangente besitzen. Die Curven φ schneiden jede der vier Geraden D_{i_1}, D_{i_2}, D_{i_3}, T_{i_4} in je einem Punkte,

dem Berührungspunkte eines Kegelschnittes Θ, der durch die vier Geraden bestimmten Kegelschnittsschaar. Der Kegelschnitt Θ trifft φ noch in zwei Punkten $\alpha\alpha$, der $y_2^{1)}$, die auf Φ_1 liegen.

Die Richtigkeit dieser Sätze ergibt sich durch die analogen Betrachtungen, wie sie in der ersten Abtheilung in II, sub **15.** angestellt wurden, und die daher hier nicht wiederholt werden sollen.

Man erkennt auch die Richtigkeit des folgenden Satzes: Bezieht man die Kegelschnitte einer Schaar, welche vier feste Tangenten D, D', D'', T berühren, projectivisch auf die Strahlen eines Büschels (s), wobei s auf T liegen möge, so erzeugen dieselben mit dem Strahlenbüschel eine Curve 4ter Ordnung, welche in s eine Spitze hat, für welche D, D', D'' drei Doppeltangenten sind und T eine Tangente aus der Spitze an die Curve darstellt. Die Spitzentangente in s ist derjenige Strahl des Büschels (s), welcher dem Kegelschnitte der Schaar entspricht, der T in s berührt.

Dass man jede Curve 4ter Ordnung mit einer Spitze auf diese Art erzeugen kann, folgt aus den eben gegebenen Sätzen über die Beschaffenheit der Quadrupel, in welche drei Doppeltangenten eingehen. Und zwar kann man jede Curve auf 60 verschiedene Arten in der obigen Weise erzeugen. Denn jedes System $[ik]$ liefert mit $[ik]'$, dem conjungirten, $3.4 = 12$ solcher Quadrupel von Geraden; da jedes der drei Paare von $[ik]$ mit den vier Paaren von $[ik]'$ bildet ein solches Quadrupel. Nun ist aber jedes Quadrupel wieder in drei Systemen und den conjungirten enthalten, so dass wir nur $\frac{1}{3}.12.15 = 60$ Quadrupel von Geraden erhalten, die Schaaren von Kegelschnitten bestimmen, welche aus Φ_1 die y_2^1 ausschneiden.

Dem entsprechend lassen sich auch 60 canonische Gleichungsformen der Φ_1 aufstellen, die anolog den Gleichungsformen (12) in der ersten Abtheilung I sub 7. sind, wobei statt T_1 eine der vier Tangenten der Schaar zu nehmen ist.

10. Die Curve Φ_1 besitzt ausser den 15 Systemen $[ik]'$, welche adjungirte dreifach berührende Kegelschnitte sind, keine dreifach berührenden adjungirte Kegelschnitte mehr. Denn in jedem solchen Systeme müsste eine Tangente T_i mit einer Doppeltangente D_h oder Tangente T_k als specieller Kegelschnitt auftreten. Die Tabelle IV zeigt aber, dass die Systeme $[ik]'$ alle diese Möglichkeiten erschöpfen.

Wir haben bei der Curve 4ter Ordnung Φ mit Doppelpunkt 16 Doppeltangenten, 30 Systeme vierfach und 16 Systeme adjungirter dreifach berührender Kegelschnitte gefunden. Übergeht durch Änderung der Constanten (indem, wie wir sahen, blos $a_{33}^2 = 1$ wird) die Curve Φ in die Curve Φ_1 mit einer Spitze, so übergehen sechs Doppeltangenten in die sechs Tangenten T_i von der Spitze an die Curve. Von den 30 Systemen vierfach berührender Kegelschnitte bleiben nur 15 Systeme erhalten. Die 15 übrigen fallen mit 15 von den 16 dreifach berührenden adjungirten Kegelschnitten zusammen und das letzte 16te System adjungirter dreifach berührender Kegelschnitte übergeht in die doppelt gezählten Geraden durch die Spitze.

Fasst man diess mit der Anmerkung am Ende der ersten Abtheilung zusammen, so ersieht man, dass, wenn die allgemeine Curve 4ter Ordnung übergeht in die Curve 4ter Ordnung mit einer Spitze, 18 Doppeltangenten in die sechs Tangenten T_i übergehen, jede also dreifach als Doppeltangente zählt (was mit der in 6. gemachten Bemerkung übereinstimmt, dass T_i, T_k in jedem der Systeme $[ik]$ dreimal zählend auftritt) und nur zehn Doppeltangenten bleiben als solche erhalten.

Von den 63 Systemen vierfach berührender Kegelschnitte übergehen drei in den Büschel doppeltgezählter Geraden durch die Spitze, 45 übergehen in die 15 Systeme adjungirter dreifach berührender Kegelschnitte und nur 15 Systeme vierfach berührender Kegelschnitte bleiben erhalten.

Inhaltsverzeichniss.